

LE 14/3/2025
Au Grand Parloir de
Louis le Grand



Plus d'informations sur
theojamin.netlify.app/piday



Illustration:
Andreas DARCOUE-TSIRTSONIS
Lily LE TRUNG TOLCAS

THEO.JAMIN@PSL.EU
PABLO.JIMENEZ@PSL.EU

Programme

Créneaux	Descriptifs
8h30 - 9h	Accueil, présentation des intervenants, description des ateliers
9h - 10h30	Exposés de Maxime EGEA et François BERNARD
10h30 - 12h	Démarrage des ateliers

Déjeuner

14h - 15h30	Exposés de Fathi BEN ARIBI et Salvador JIMÉNEZ
15h30 - 16h	Dégustation des π es et votes
16h - 17h	Reprise des ateliers
17h	Clôture du π -day



FIGURE 1 – QR code pour le vote de la meilleure Pie.

1 Exposés

1.1 Maxime Egea

Titre : *À la découverte des chaînes de Markov.*

Résumé : Introduites par Andreï Markov en 1906, les chaînes de Markov occupent aujourd’hui une place centrale dans la recherche en probabilités. Cette présentation sera l’occasion de découvrir ces outils mathématiques au travers d’exemples simples, concrets et variés. De manière intuitive et accessible, nous explorerons un théorème important lié à la stabilité de ces chaînes, qui permettra de répondre à certaines questions posées au cours de la présentation.

1.2 François Bernard

Titre : *Résultant et discriminant : démêler les racines du problème.*

Résumé : Étant donné un polynôme complexe de degré 2, tous les bacheliers connaissent la formule « $b^2 - 4ac$ ». Cet outil, appelé discriminant, permet de déterminer le nombre de racines distinctes du polynôme. En effet, le discriminant s’annule si et seulement si le polynôme admet une unique racine. Dans cette présentation, nous introduirons un outil plus général : le résultant. Pour deux polynômes de degrés quelconques, le résultant est une formule exprimée en fonction de leurs coefficients qui s’annule si et seulement si les polynômes partagent une racine commune. En particulier, en calculant le résultant d’un polynôme avec sa dérivée, on obtient une généralisation de la formule du discriminant aux polynômes de degrés arbitraires. Après avoir expliqué la définition de ces deux outils, nous présenterons quelques-unes de leurs nombreuses applications.

1.3 Fathi Ben Aribi

Titre : *La théorie des noeuds, un domaine très attachant.*

Résumé : Avez-vous déjà noué une ficelle ? Bravo, vous avez toutes les qualifications requises pour venir découvrir la théorie des noeuds.

D’abord initiée par des physiciens pour décrire les atomes, et récemment utilisée par des biologistes pour détricoter l’ADN de nos cellules, cette théorie mathématique vise à classifier les noeuds, à l’aide d’outils variés, comme les... coloriages ?

Si cela vous intrigue, venez rejoindre cet atelier théorique et pratique pour comprendre de nouvelles ficelles des mathématiques !

1.4 Salvador Jiménez

Titre : *Le calcul fractionnaire comme outil de modélisation.*

Résumé : Le calcul fractionnaire étend les intégrales et les dérivées à des ordres non-entiers. On l’utilise pour modéliser la non-localité ou les effets de mémoire dans des systèmes. Nous traiterons différents exemples et applications.

2 Ateliers

2.1 Un ascenseur pas pratique — Théo Jamin

Vous venez de monter dans un ascenseur possédant seulement 4 boutons :

- un bouton permet de monter de 5 étages,
- un autre permet de descendre de 5 étages,
- un troisième propose de monter de 7 étages,
- et le dernier, de descendre de 7 étages.

On supposera qu'il n'y a pas de limite d'étages en descendant ni en montant.

1. Est-il possible d'aller au 243^{ème} étage avec cet ascenseur ?
2. De manière plus générale, à quel étage peut-on se rendre ?
3. Que se passe-t-il si je change 5 par 11 et 7 par 17 ? Ou encore par n et m ?
4. Pouvez-vous trouver un algorithme pour se rendre (si cela est possible) à l'étage ℓ ?
5. Si l'on impose que l'ascenseur ne peut plus descendre en dessous du rez-de-chaussée ?

2.2 Une lettre d'Euler — Théo Jamin

Vous avez reçu une lettre d'EULER. Malheureusement, vous venez de faire tomber votre café dessus... Vous l'ouvrez et découvrez qu'une partie est illisible. Vous lisez

J'ai trouvé une élégante formule qui relie le nombre de sommets s , de faces f et d'arêtes a de n'importe quel polyèdre convexe de l'espace :

$$s - a + f = 2.$$

Pourriez-vous imaginer une preuve que vous pourriez transmettre à la communauté mathématique ?

2.3 Un passager anarchiste — Théo Jamin

Un avion a des places numérotées de 1 à n , avec n un entier naturel. Le jour de l'embarquement, toutes les places ont été attribuées à un passager et les passagers se présentent dans l'ordre de leurs numéros de siège. Le premier passager, ne respectant pas les règles, s'assoit au hasard (il est possible qu'il s'assoie à sa place attribuée). Les passagers suivants s'assoient à leur place attribuée si elle est libre et sinon s'assoient au hasard.

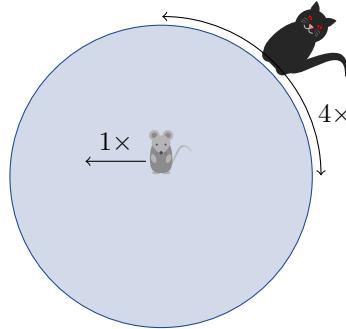
1. Pour $n = 2, 3$ ou 4 , déterminer la probabilité que le dernier passager puisse s'asseoir à sa place.
2. Déterminer cette probabilité pour n quelconque.

2.4 Un jeu dangereux — Théo Jamin

Vous participez à un jeu dans lequel, à chaque fois qu'une personne est touchée elle est éliminée. Vous êtes disposés en cercle et on vous attribue un numéro de 1 à n (pour n le nombre de joueurs) dans le sens des aiguilles d'une montre. Le premier joueur touche la personne suivante, qui est donc éliminée. Le joueur suivant fait de même et le jeu continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un joueur restant qui est déclaré vainqueur. Trouver un critère pour choisir votre place en fonction du nombre de joueurs n .

2.5 Le chat et la souris — Théo Jamin

Vous êtes dans votre jardin et vous venez de voir une souris tomber dans votre piscine (tout à fait ronde). Votre chat, comme tous les chats, aime les souris mais a horreur de l'eau. Vous notez que votre chat se déplace quatre fois plus vite que la souris.



La question que vous vous poser est donc la suivante : la souris réussira t-elle à sortir de la piscine sans se faire attraper par le chat ?

2.6 Les maisons de Dudeney — Théo Jamin

Trois familles voisines se détestant mutuellement ont besoin d'eau, d'électricité et de gaz et doivent donc accéder quand elles le veulent aux trois usines. Vous êtes le maire de la ville où habitent ces familles. Elles vous demandent de l'aide pour l'accès aux usines et expliquent qu'elles souhaitent que vous construisiez les routes d'accès de chacune des maisons à chacune des usines, cependant, elles ne doivent pas se croiser pour éviter tout problème. Avez-vous une solution ? Que se passe t-il si les familles habitent sur une autre planète possédant une géométrie différente de celle de la terre ?

Peut-être que le groupe ayant reçu la lettre d'EULER pourra vous aider...

2.7 The Flame Fractal Algorithm — Théo Jamin

L'objectif de cet atelier est de construire informatiquement des fractales en suivant la méthode FFA et d'étudier les aspects mathématiques. Les fractales obtenues peuvent ressembler à



FIGURE 2 – Exemple de « flame fractal »

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction et soit $0 < k < 1$. On dit que f est k -contractante si

$$\forall p, p' \in \mathbb{R}^2, \quad d(f(p) - f(p')) \leq kd(p, p')$$

Fixons maintenant n applications $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ k -contractantes. On s'intéresse à l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$S = \bigcup_{i=1}^n f_i(S).$$

A priori, cet ensemble est difficile à calculer mais nous allons l'approcher informatiquement en suivant l'algorithme « chaos game ».

Définition 2 (Chaos game algorithm). Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(x_0, y_0) \in [-1, 1]^2$ choisi aléatoirement. L'algorithme est le suivant

Pour $k = 1$ jusqu'à N :

1. On choisit aléatoirement $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
2. on calcule $(x_k, y_k) = f_i(x_{k-1}, y_{k-1})$,
3. dessiner (x_k, y_k) dès que $k > 20$.

Voici donc l'atelier proposé (vous pouvez répondre aux questions dans le désordre).

2.7.1 Aspects Mathématiques

1. Montrer que les fonctions

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right), \quad f_2(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right) \quad \text{et} \quad f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2} \right)$$

sont contractantes.

2. Montrer que la composée de fonctions k -contractantes est encore contractante (on pourra préciser le coefficient de contraction).
3. En supposant que toutes les fonctions f_i sont $\frac{1}{2}$ -contractantes, montrer que

$$\forall k > 20, \quad d((x_k, y_k), S) < 10^{-6}$$

(autrement dit, après 20 itérations, les points (x_k, y_k) sont très proches de S).

2.7.2 Aspects informatique

1. Coder l'algorithme chaos game qui prend comme argument n -fonctions et N itérations.
2. Le tester pour les fonctions f_1 , f_2 et f_3 données précédemment.
3. Attribuer à chaque fonction f_i une couleur c_i et dessiner à chaque étape le point $(x_k, y_k) = f_i(x_{k-1}, y_{k-1})$ avec la couleur c_i .
4. Lorsque l'algorithme tourne, rendez-vous sur le site https://flam3.com/flame_draves.pdf et remplacer les fonctions f_1 , f_2 et f_3 par celles proposées dans le document.
5. Amusez-vous à faire des fractales !

2.8 Cardinaux de \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} — Théo Jamin

1. Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Montrer que A et \mathbb{N} sont en bijection.
2. Montrer que

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*, \quad (n, m) \mapsto 2^m(2n + 1)$$

définit une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N}^* .

3. Montrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{Q} et \mathbb{N} . En existe-t-il une entre \mathbb{N} et \mathbb{R} ?

2.9 Groupe du Rubik's cube — Théo Jamin

On appelle *groupe* la donnée de (G, \times) un ensemble G muni d'une loi interne

$$\times : G \times G \rightarrow G$$

telle que

1. la loi \times est associative :

$$\forall x, y, z \in G, \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

2. il existe $e \in G$, appelé *élément neutre*, qui vérifie

$$\forall x \in G, \quad x \times e = e \times x = x.$$

3. tout élément de G possède un *symétrique*

$$\forall x \in G, \quad \exists y \in G, \quad x \times y = e.$$

On peut montrer que le symétrique est unique et on le notera alors x^{-1} . Après avoir cherché quelques exemples simples de groupes, on pourra montrer que l'ensemble des mouvements du rubik's cube forment un groupe R muni de l'opération « suivi de... ». L'objectif de ce sujet est de réussir à suivre le plus loin possible le raisonnement suivant (qui est détaillé ici : http://trucsmaths.free.fr/rubik_groupe.htm#gen)

1. Un mouvement du rubik's cube induit une permutation des cubes sommets et de la même façon, il induit une permutation des cubes arêtes.
2. Ces ensembles sont de cardinal 8 et 12 respectivement et on peut alors construire un *morphisme de groupes*

$$\text{res} : R \rightarrow \mathfrak{S}_8 \times \mathfrak{S}_{12}$$

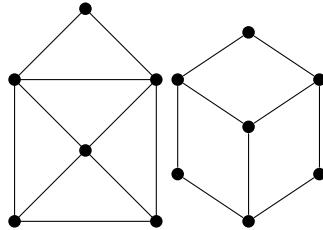
3. L'*image* de ce morphisme est l'ensemble

$$\text{Im}(\text{res}) = \{(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_8 \times \mathfrak{S}_{12} \mid \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma')\}$$

4. En fixant maintenant les orientations des arêtes et des sommets (que l'on peut coder respectivement par $\{0, 1\}$ et $\{0, 1, 2\}$ pour chacun d'eux), on s'intéresse aux éléments de G qui laissent toutes les pièces invariantes et qui modifie l'orientation. Autrement dit, il s'agit de calculer le *noyau* du morphisme res .
5. Finalement, on peut montrer que

$$R \simeq \text{Im}(\text{res}) \rtimes \ker(\text{res}).$$

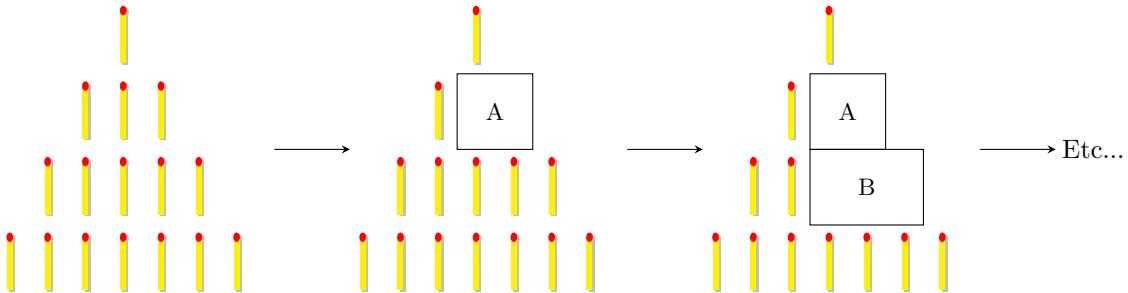
2.10 Parcours eulériens de graphes — Pablo Jiménez



On cherche à dessiner une forme comme celle-ci sans lever le crayon du papier, et sans passer deux fois par la même arête. Arrivez-vous à le faire sur le dessin de gauche ? Et celui de droite ? On appelle un tel chemin un *parcours eulérien* du *graphe* G en question. En étudiant le nombre d'arêtes qui sortent de chaque sommet, ce qu'on appelle le *degré du sommet*, trouvez une façon de différencier les graphes qui admettent un parcours eulérien de ceux qui n'en ont pas.

2.11 Le jeu de Marienbad — Pablo Jiménez

Le jeu de Marienbad se joue à deux : des allumettes sont disposées en quatre rangs de 1, 3, 5 et 7. Chaque joueur prend alors à son tour le nombre d'allumettes qu'il souhaite dans une seule rangée. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.



L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Et si on modifie les règles ?

2.12 Collection de cartes — Maxime Egea

Le jeune Sacha cherche à compléter sa collection de 151 cartes. Chaque paquet de 4 cartes coûte 1 euro et chaque carte a la même probabilité d'être obtenue. En moyenne, Sacha se demande combien va coûter l'obtention de la collection complète ? Pour répondre au problème, on propose de le modéliser comme suit : X_n est le nombre de cartes différentes obtenues après avoir acheté n cartes.

Questions

- Expliquer pourquoi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Décrire l'espace d'état et sa matrice de transition. On rappelle que la matrice de transition $P = (p_{ij})$ d'une chaîne de Markov est définie par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i).$$

- On note T_k le nombre d'achats nécessaires pour obtenir une nouvelle carte lorsque l'on possède déjà k cartes différentes. Quelle est la loi de T_k ?
- Que vaut l'espérance de T_k ? En déduire le nombre moyen d'achat nécessaire compléter la collection.
- Donner une estimation du coût moyen total pour compléter la collection.

Indication : On pourra utiliser la formule :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $\gamma \approx 0.58$ est la constante d'Euler.

À la découverte des Chaînes de Markov

Pi Day - Lycée Louis Le Grand

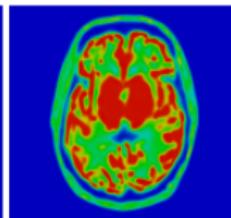
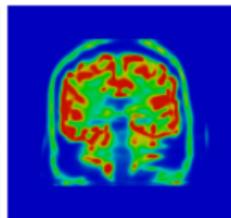
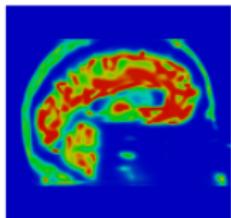
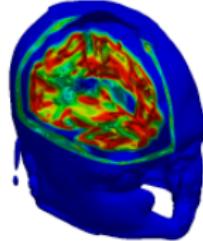
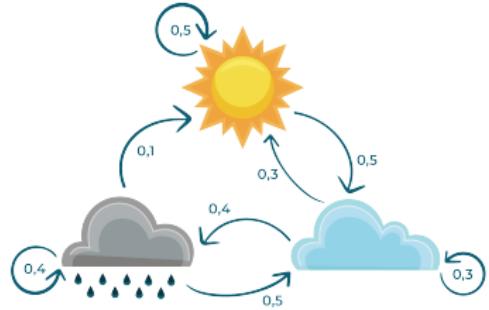
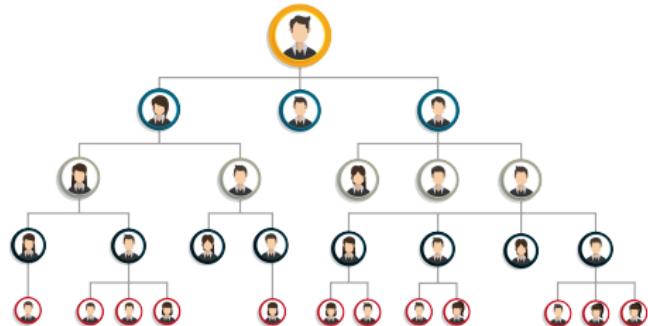
MAXIME EGÉA

14 Mars 2025



LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
STATISTIQUE & MODÉLISATION

Motivations



Cadre Mathématique

Notations

On définit

- Un **espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Un **espace d'états** E . Pour cette présentation, $E = \{1, 2, \dots, M\}$ est fini.
- Une suite de **variables aléatoires** $X_n : \Omega \mapsto E$ où n représente l'évolution dans le temps.
- Quand E est fini, on décrira la loi d'une v.a X avec un **vecteur ligne** $X \sim (\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = M))$.

Exemple : le modèle de la météo

$$\Omega = \{ \text{sun icon}, \text{cloud icon}, \text{rain cloud icon} \} \quad \text{et} \quad E = \{1, 2, 3\}.$$

Chaîne de Markov

Définition

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace d'états E . On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov si elle vérifie la **propriété de Markov**, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = i) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$ et pour tout $(i, j, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+2}$.

La chaîne est dite **homogène** si ses probabilités de transition ne dépendent pas de n :

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

pour tout $i, j \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.

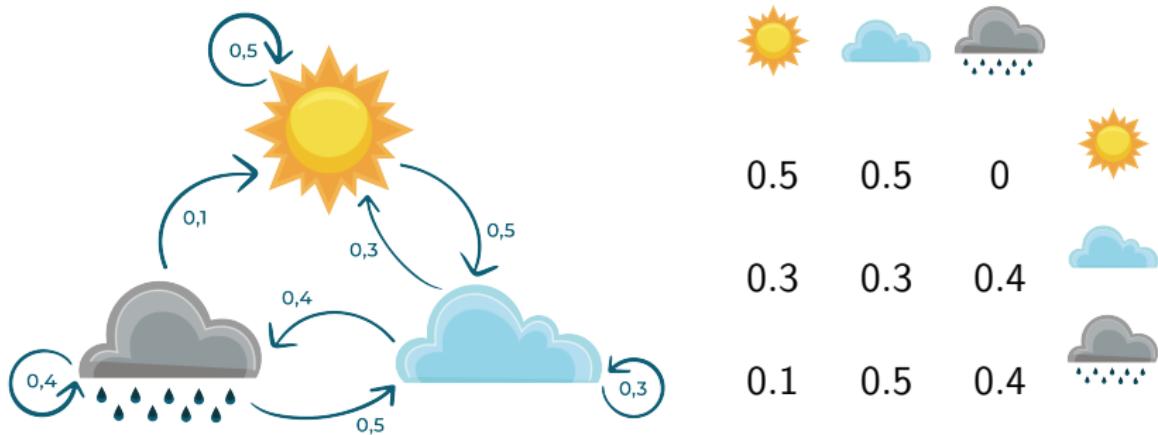
Matrice de transition

Définition

Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, on peut définir sa **matrice de transition** P :

$$P := (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Par exemple :



Équation de Chapman-Kolmogorov

Pour $i, k \in E$ on définit

$$p_{ik}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i),$$

on note $P^{(n)}$ la **matrice de transition en n étapes**.

Théorème (équation de Chapman-Kolmogorov)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E avec matrice de transition P , alors on a

$$P^{(n)} = P^n.$$

La matrice de transition en n étapes est égale à la puissance n -ième de la matrice de transition.

Cela nous permet de décrire la loi de X_n matriciellement.

Loi de X_2 dans le modèle de météo

Avec la formule des **probabilités totales**, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)}_{=p_{ij}} \mathbb{P}(X_0 = i).$$

Donc, si on note μ le vecteur ligne de la loi de X_0 , on a $X_1 \sim \mu P$.

Par exemple, si $\mu = (1, 0, 0)$ alors d'après l'équation de

Chapman-Kolmogorov

$$X_2 \sim (1, 0, 0) \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Loi de X_2 dans le modèle de météo

Avec la formule des **probabilités totales**, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)}_{=p_{ij}} \mathbb{P}(X_0 = i).$$

Donc, si on note μ le vecteur ligne de la loi de X_0 , on a $X_1 \sim \mu P$.

Par exemple, si $\mu = (1, 0, 0)$ alors d'après l'équation de

Chapman-Kolmogorov

$$X_2 \sim (1, 0, 0) \times \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{25} & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

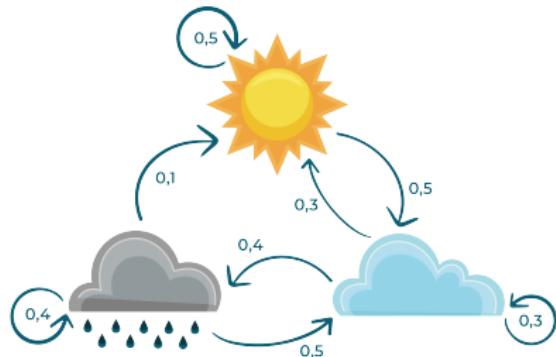
Classification des états

Définition

- On dit qu'un état $i \in E$ **communique** avec j s'il existe n tel que $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$
- Il est **transitoire** si la probabilité d'y revenir en temps fini est strictement inférieure à 1 et **récurrent** sinon.
- Un état $i \in E$ est **périodique** s'il existe un entier $d > 1$ tel que les retours à i se font uniquement aux multiples de d .

Une chaîne est dite **irréductible** si tous les états communiquent entre eux.

Dans l'exemple de la météo, la chaîne de Markov est **irréductible**.



loi stationnaire

Définition

*Une loi **stationnaire** π est un vecteur ligne à M coordonnées dont la somme des coefficients vaut 1 et telle que*

$$\pi P = \pi.$$

Cela signifie que si π est la loi initiale alors, la chaîne gardera la même loi à chaque instant.

Proposition

*Si la chaîne de Markov est **irréductible** alors il y a existence et unicité de la loi **stationnaire**.*

Temps moyen passé à chaque état

Théorème (Ergodique)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible de loi stationnaire π . Pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on a la convergence suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} f(i)\pi_i.$$

En particulier, si f est l'indicatrice de l'état j :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

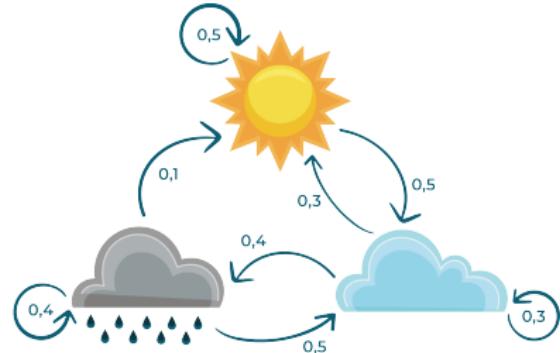
Le théorème décrit le **temps moyen passé à l'état j** .

loi stationnaire pour la météo

La chaîne est **irréductible** donc il existe une unique **loi stationnaire**. Il n'y a plus qu'à résoudre le système

$$\pi \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} = \pi,$$

on trouve $\pi = \left(\frac{11}{36} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{5}{18} \right)$.



Le **théorème ergodique** nous permet d'affirmer que, sur un temps long, il fera du soleil 11 jours sur 36 en moyenne.

Espace d'états E fini - Résumé

- À partir d'une dynamique d'évolution, on sait construire la **matrice de transition** de la chaîne.
- Grâce à l'équation de **Chapman-Kolmogorov**, on sait décrire la loi de la chaîne à tout instants n .
- On sait **classifier** les états : **transitoire** ou **récurrent**.
- Quand la chaîne est **irréductible**, on a vu un résultat de **convergence ergodique** vers la loi stationnaire. Sous des hypothèses plus fortes, il y a aussi **convergence en loi** de la chaîne vers la loi stationnaire.

Quid de E infini ?

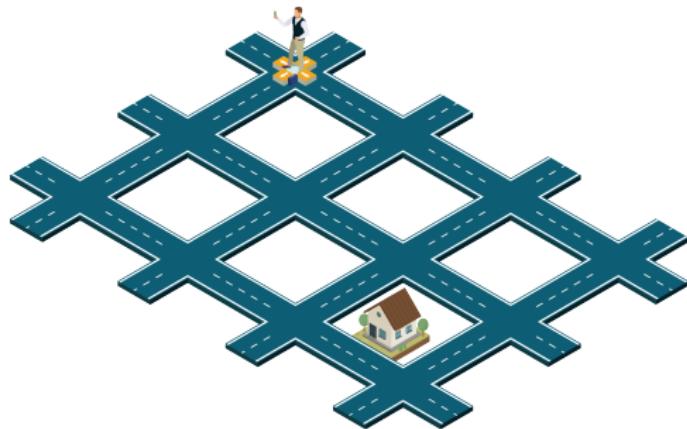
Chaînes de Markov en espace d'états infini

- La matrice de transition devient un opérateur, il y a aussi une équation de **Chapman-Kolmogorov**
- L'irréductibilité de la chaîne **n'implique plus nécessairement** l'existence d'une loi stationnaire.
- Il faut en plus que la chaîne soit **récurrente positive** pour avoir existence et unicité.
- Dans le cas d'une chaîne **irréductible** et **récurrente positive** il y a convergence en loi de la chaîne et un théorème ergodique.

Le voyageur perdu - Marche aléatoire en 2-dimension

Définition

- $X_n \in \mathbb{Z}^2$ est la position du voyageur à l'instant n , à chaque instant il avance au hasard dans l'une des 4 directions.
- On suppose qu'il a commencé sa marche $X_0 = (0, 0)$, là où se trouve son logement.



A t'il une chance de rentrer en temps fini ?

Le voyageur perdu - Marche aléatoire en 2-dimension

Proposition

Une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{Z}^d est **récurrente** si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = 0) = +\infty.$$

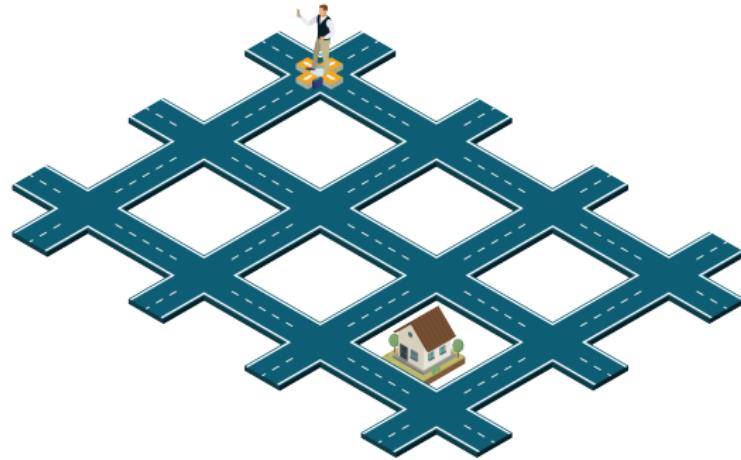
- On peut montrer que $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \simeq \frac{1}{\pi n}$ et donc $(X_n)_{n \geq 0}$ est **récurrente** i.e elle revient à l'origine une infinité de fois (p.s).
- En revanche, elle **n'est pas récurrente positive** et elle **n'a pas de loi stationnaire**.

Remarque

En 3-dimension, on a $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \simeq \frac{1}{(2\pi n)^{3/2}}$ donc la chaîne n'est pas récurrente. Cela signifie qu'un pigeon ayant perdu tout sens d'orientation a des chances de ne jamais rentrer au nid !



Merci pour votre attention !



Résultant et discriminant

démêler les racines du problème

François Bernard

Pi-Day

14 mars 2024

Introduction

→ Un polynôme est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

où X est une indéterminée et les $a_i \in \mathbb{C}$ sont appelés *coefficients* de P .

Introduction

→ Un polynôme est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

où X est une indéterminée et les $a_i \in \mathbb{C}$ sont appelés *coefficients* de P .

→ Un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ est appelé *racine* de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple

Le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une racine du polynôme $X^2 - X - 1$.

Le cœur de la géométrie algébrique consiste à étudier les racines communes de plusieurs polynômes à plusieurs variables.

Résultant

Résultant

Soient

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

et $Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0$

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

Résultant

Soient

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

et $Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0$

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

→ On considère $\text{Res}_X(P, Q) \in \mathbb{C}$ le résultant de P et Q .

Proposition

$\text{Res}_X(P, Q) = 0$ si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$.

Calcul du résultant

Considérons la *matrice de Sylvester* de taille $(m + n) \times (m + n)$

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & \vdots & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & b_1 & & & b_m \\ a_0 & & & a_{n-1} & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & b_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

- Le résultant est donné par le *déterminant* de cette matrice.
- On effectue un pivot de Gauss, puis on multiplie les éléments sur la diagonale.

Exemple

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} x^5 + 2x^3 + 4 = 0 \\ x^4 + x + 7 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

On calcule

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right|$$

Exemple

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} x^5 + 2x^3 + 4 = 0 \\ x^4 + x + 7 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

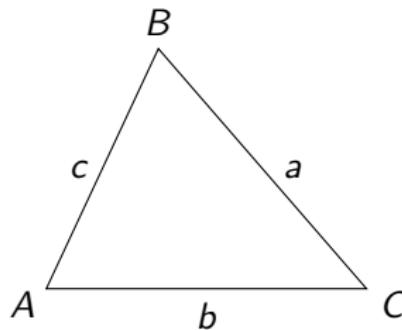
On calcule

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{127}{11} & \frac{-1}{11} & -2 & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{885}{127} & \frac{39}{127} & \frac{24}{127} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2061}{295} & \frac{111}{295} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1631}{229} \end{array} \right|$$

Formule de Héron

Formule de Héron

Soit ABC un triangle non plat du plan. On désire exprimer son aire \mathcal{A} en fonction des longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ de ses côtés.

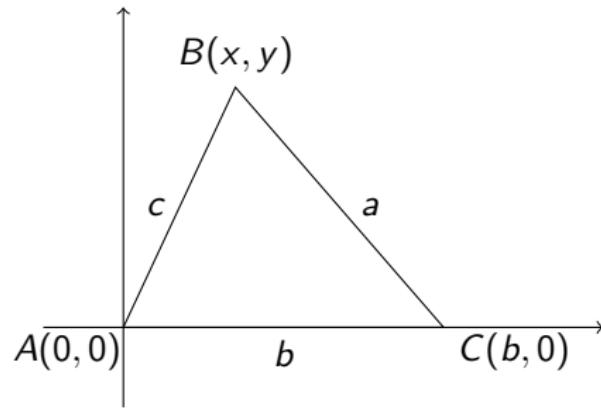


Théorème (Formule de Héron)

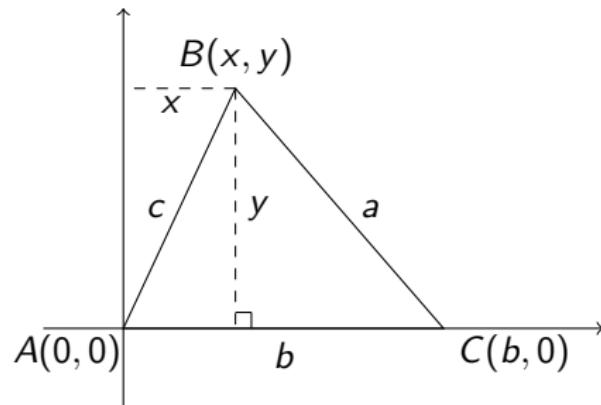
En notant $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ le demi-périmètre de ABC , on a

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Formule de Héron

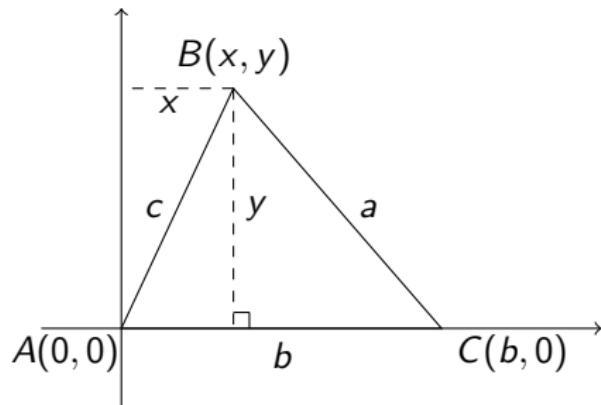


Formule de Héron



→ La formule de l'Aire nous donne $\mathcal{A} - \frac{1}{2}by = 0$.

Formule de Héron



→ La formule de l'Aire nous donne $\mathcal{A} - \frac{1}{2}by = 0$.

→ Le théorème de Pythagore nous donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - c^2 = 0 \\ (b - x)^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Formule de Héron

On pose

$$P(X) = X^2 + y^2 - c^2$$

et $Q(X) = (b - X)^2 + y^2 - a^2$

→ On sait que x est une racine commune à P et Q .

Formule de Héron

On pose

$$P(X) = X^2 + y^2 - c^2$$

et $Q(X) = (b - X)^2 + y^2 - a^2$

→ On sait que x est une racine commune à P et Q .

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Res}_x(P, Q) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2b & 1 \\ y^2 - c^2 & 0 & b^2 + y^2 - a^2 & -2b \\ 0 & y^2 - c^2 & 0 & b^2 + y^2 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= 4b^2y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Formule de Héron

On pose

$$W(Y) = 4b^2Y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4$$

et $V(Y) = -\frac{1}{2}bY + \mathcal{A}$

→ On sait que y est une racine commune à W et V .

Formule de Héron

On pose

$$W(Y) = 4b^2Y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4$$

et $V(Y) = -\frac{1}{2}bY + \mathcal{A}$

→ On sait que y est une racine commune à W et V .

On a donc

$$\begin{aligned}\text{Res}_Y(W, V) &= \frac{1}{4}b^4(16\mathcal{A}^2 - (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)) \\ &= \frac{1}{4}b^4(16\mathcal{A}^2 - 2p \times 2(p-c) \times 2(p-b) \times 2(p-a)) \\ &= 8b^4(\mathcal{A}^2 - p(p-c)(p-b)(p-a)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Au final

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Intersection de surfaces

Intersection de surfaces

Le résultant permet d'éliminer une variable quand deux figures géométriques s'intersectent.

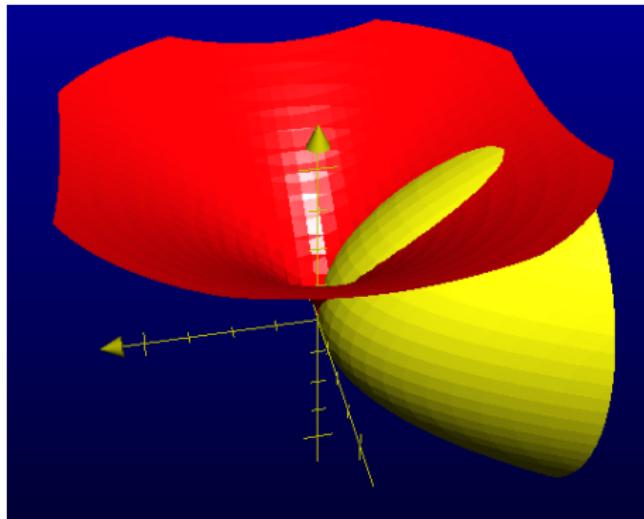


Figure – En rouge $P(x, y, z) = y^2 + x^2 - z^3 = 0$
En jaune $Q(x, y, z) = y + x^2 + z^2 = 0$

Ici, par exemple, $\text{Res}_Y(P, Q) = (x^2 + z^2)^2 - z^3 - x^2 = 0$ sur l'intersection.

Discriminant

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{C}$. Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = a_n (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{C}$. Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

→ On cherche à savoir si les racines sont distinctes.

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{C}$. Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = a_n (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

→ On cherche à savoir si les racines sont distinctes.

Définition

On considère le polynôme dérivé

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$$

Remarque :

$$\begin{aligned} (u_1 u_2 u_3)' &= u_1' (u_2 u_3) + u_1 (u_2 u_3)' \\ &= u_1' u_2 u_3 + u_1 (u_2' u_3 + u_2 u_3') \\ &= u_1' u_2 u_3 + u_1 u_2' u_3 + u_1 u_2 u_3' \end{aligned}$$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

De manière générale :

$$P'(\alpha_i) = 0 \text{ si et seulement si } \exists j \text{ tel que } \alpha_i = \alpha_j.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Les racines de P sont distinctes.*
- *P et P' n'ont pas de racines communes.*
- $\text{Res}_X(P, P') \neq 0$.

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

De manière générale :

$$P'(\alpha_i) = 0 \text{ si et seulement si } \exists j \text{ tel que } \alpha_i = \alpha_j.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Les racines de P sont distinctes.
- P et P' n'ont pas de racines communes.
- $\text{Res}_X(P, P') \neq 0$.

→ On note $\text{Disc}(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \text{Res}_X(P, P')$ le *discriminant* de P .

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\text{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\text{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

On effectue le pivot de Gauss et on obtient

$$\text{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{vmatrix} = a \times (-b) \times \left(b - \frac{4ac}{b}\right) = -a(b^2 - 4ac)$$

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\text{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

On effectue le pivot de Gauss et on obtient

$$\text{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{vmatrix} = a \times (-b) \times \left(b - \frac{4ac}{b}\right) = -a(b^2 - 4ac)$$

Donc P admet une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$.

Exemples en degré 3 et 4

Pour $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\text{Disc}(P) = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$$

Exemples en degré 3 et 4

Pour $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\text{Disc}(P) = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$$

Pour $P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, on a

$$\begin{aligned} \text{Disc}(P) = & 256a^3e^3 - 128a^2e^2c^2 - 4b^3d^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 192a^2bde^2 - \\ & 27b^4e^2 - 6ab^2d^2e + 144ab^2ce^2 + 144a^2cd^2e - 80abc^2de + 18b^3cde + 18abcd^3 + \\ & b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4 \end{aligned}$$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\text{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\text{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

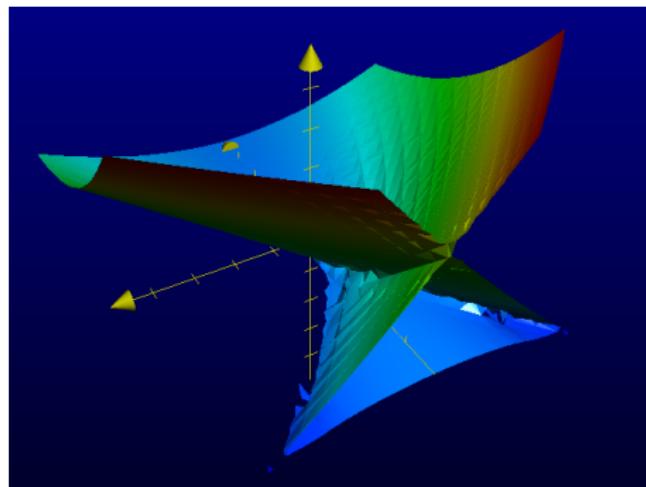


Figure – La surface $\text{Disc}(P) = 0$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\text{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

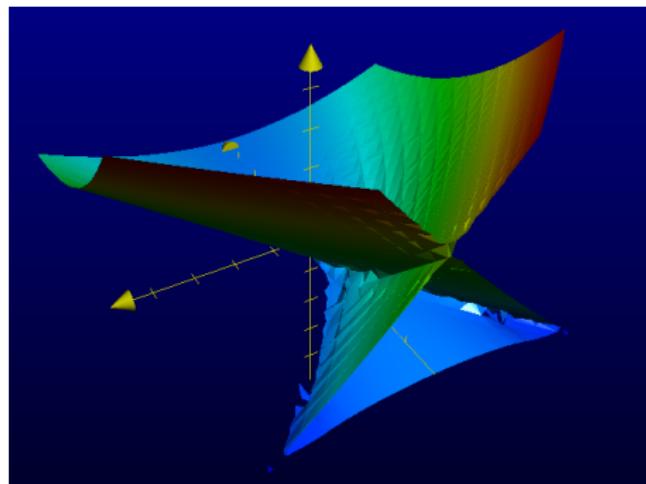


Figure – La surface $\text{Disc}(P) = 0$

Merci pour votre attention !

La théorie des nœuds

Fathi Ben Aribi

Sorbonne Université (Paris) - IMJ-PRG - INSPE Paris

Pi DAY Lycée Louis-Le-Grand

14 mars 2025

Nœud : **Trajectoire** d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

Nœud : Trajectoire d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

On veut **classer** les nœuds, à **déformation** de la ficelle près, en gardant les bouts **joints**.

Les nœuds en mathématiques

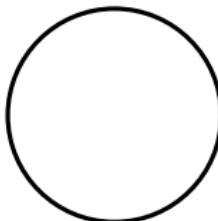
Nœud : Trajectoire d'une **ficelle** dans l'**espace**, dont on **recolle** ensuite les **bouts**.

On veut **classer** les nœuds, à **déformation** de la ficelle près, en gardant les bouts **joints**.

Dessins de nœuds



=



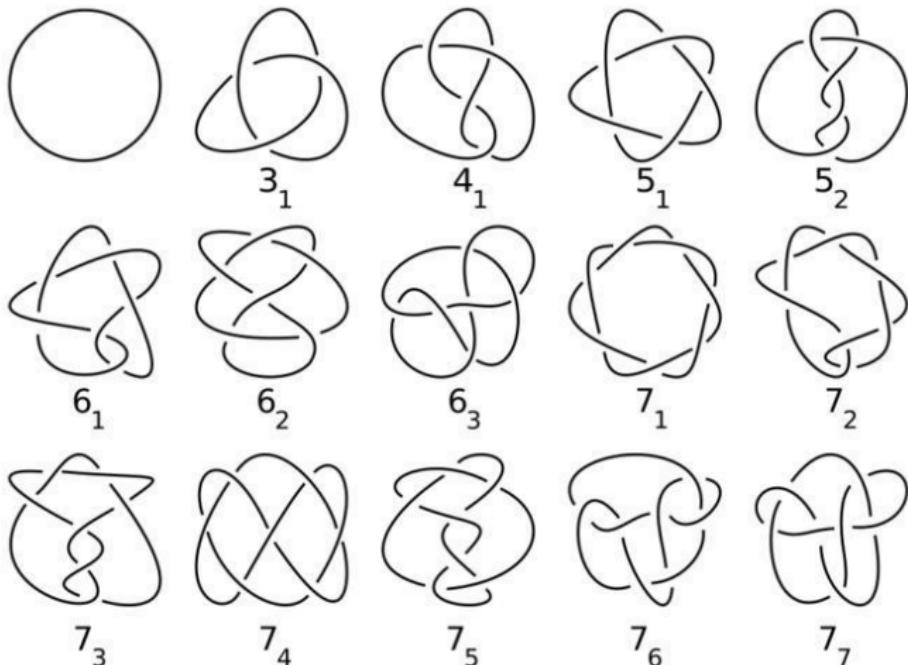
≠



Nœud trivial

Nœud de trèfle

Table de classification des nœuds



... et bien d'autres encore !

L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

→ Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!

L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

→ Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!

→ **Tait** et **Little** commencent à **classifier** les nœuds, jusqu'à 10 croisements.



L'origine physico-chimique de la théorie des nœuds

Source : Wikipedia - Vortex theory of the atom

Fin 19e siècle: **Lord Kelvin** propose l'idée que les **atomes** sont des **tourbillons** dans un fluide qui remplit tout l'univers (l'**éther**).

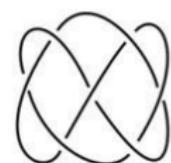
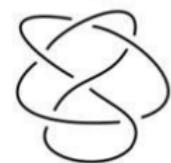
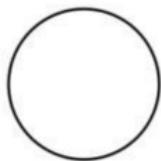
- Pour **classifier** les **atomes**, il suffit donc de classifier les **nœuds**!
- **Tait** et **Little** commencent à **classifier** les nœuds, jusqu'à 10 croisements.

Michelson-Morley 1887 prouvent que... **L'éther n'existe pas !**

Pas grave ! Les **mathématiciens** ont pris le relais entretemps, et la **théorie des nœuds** est lancée.

Défi n°1 : Mon nœud en 5 secondes

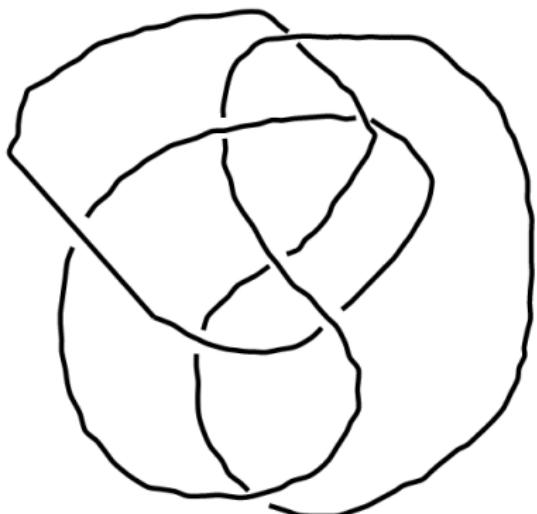
En 5 secondes, feras-tu un de ces nœuds, ou un **pas dans la table**?



Reconnaitre un nœud avec l'ordinateur

<https://joshuahhh.com/projects/kit/>

knot identification tool



by [Joshua Horowitz](#)

Alexander polynomial: 1,-3,5,-3,1



Les règles du tricoloriage

Un **dessin de nœud** est fait de **traits** et de **croisements**.

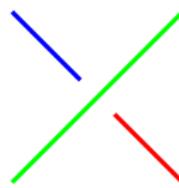
Les règles du tricoloriage

Un **dessin de nœud** est fait de **traits** et de **croisements**.

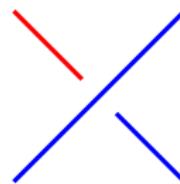
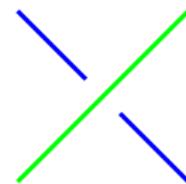
On choisit **trois couleurs** (par exemple **Rouge**, **Vert**, **Bleu**).

Tricoloriage d'un dessin de nœud = **Coloriage des traits** tel que:

AUTORISÉ : **une** ou **trois** couleurs à un croisement



INTERDIT : deux couleurs à un croisement



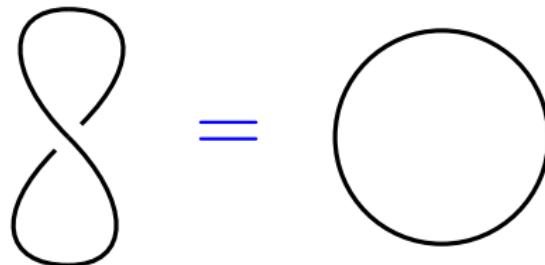
Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud,
inchangé si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin!**

Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

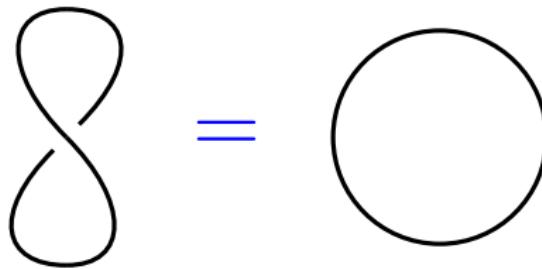
Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)



Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)

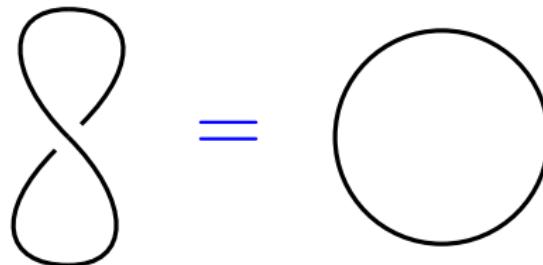


Exemple : Le **minimum du nombre de croisements** parmi **tous les dessins**... c'est un invariant !

Les invariants de nœuds

Invariant de nœud = objet mathématique associé à un nœud, **inchangé** si on **bouge la ficelle** ou on prend **un autre dessin**!

Contre-Exemple : Le **nombre de croisements d'un dessin** n'est **PAS** un invariant (on peut rajouter des boucles à un nœud !)



Exemple : Le **minimum du nombre de croisements** parmi **tous les dessins**... c'est un invariant !

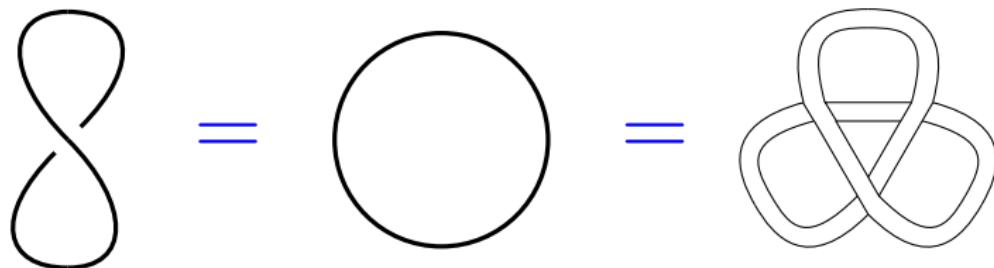
Exemple : Le **nombre de tricoloriages** d'un **quelconque dessin du nœud** est un **invariant du nœud**! (pas évident, admis ici)

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

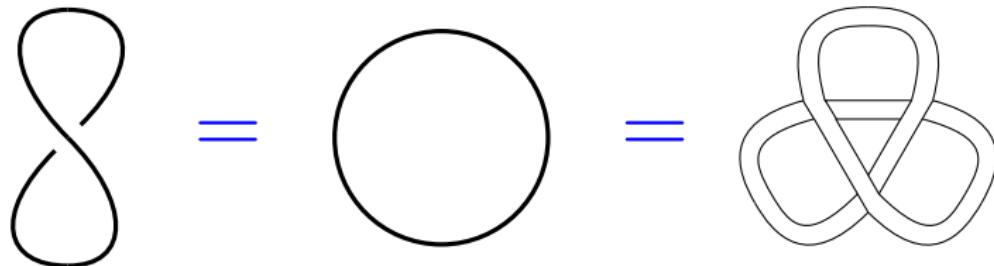
Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



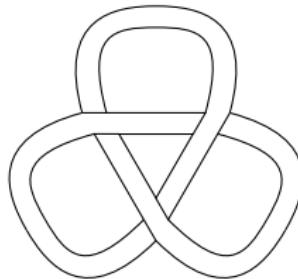
Nœud trivial : 3 tricoloriages possibles.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



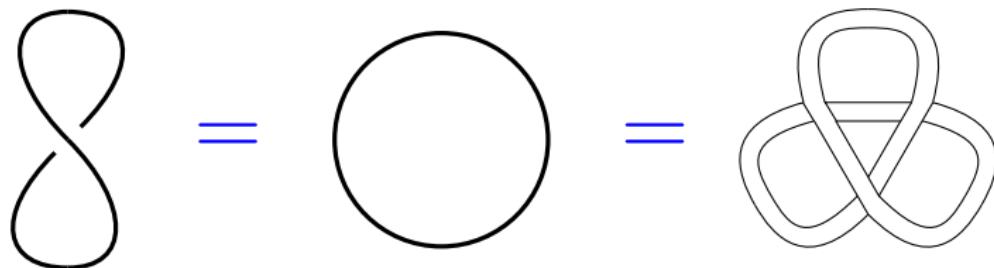
Nœud trivial : 3 tricoloriages possibles.



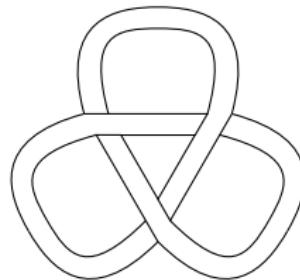
Nœud de trèfle : 9 tricoloriages possibles.

Distinguer les nœuds par le nombre de tricoloriages

Un **invariant** permet de **différencier deux nœuds**.



Nœud trivial : 3 tricoloriages possibles.



Nœud de trèfle : 9 tricoloriages possibles.

→ Ce sont **deux nœuds différents!**

KnotInfo: Table of Knots

Search Results

[Export to CSV](#)

Name	Fibered	Genus	Alexander	Volume
<u>3_1</u>	Y	1	$1-t+t^2$	0
<u>4_1</u>	Y	1	$1-3*t+t^2$	2.029883213
<u>5_1</u>	Y	2	$1-t+t^2-t^3+t^4$	0
<u>5_2</u>	N	1	$2-3*t+2*t^2$	2.828122088
<u>6_1</u>	N	1	$2-5*t+2*t^2$	3.163963229
<u>6_2</u>	Y	2	$1-3*t+3*t^2-3*t^3+t^4$	4.400832516
<u>6_3</u>	Y	2	$1-3*t+5*t^2-3*t^3+t^4$	5.693021091
<u>7_1</u>	Y	3	$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6$	0

Ma recherche : étudier et **calculer** divers invariants de nœuds.

Plus d'un siècle de théorie des nœuds

Née de la **Physique** (XIX^e siècle), pour classifier les **atomes**.

Développée en **Mathématiques** (XX^e – XXI^e siècles).

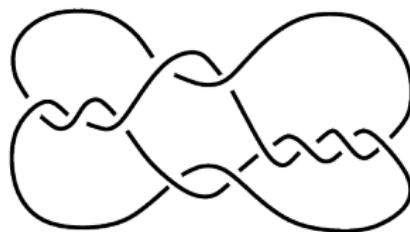
Appliquée en **Biologie** (années 1990) pour étudier **l'ADN**.



Des nœuds dans l'ADN **empêchent la division cellulaire**.
→ Recherche de **traitements** contre les **cancers**.

Merci de votre attention !

Avez-vous des questions ?



(Bonus : prouvez que c'est un dessin du nœud trivial !)

Le calcul fractionnaire comme outil de modélisation



Salvador Jiménez

Pi Day, 3/14/2025

Contents

1	Introduction	3
1.1	Modélisation (mathématique)	3
1.2	Un cas bien réussi : les systèmes dynamiques	4
1.2.1	Formulation (temps continu, nombre fini de variables)	5
1.2.2	Étude des points critiques pour un système autonome	7
2	Outils mathématiques	10
2.1	Motivation d'une "formulation fractionnaire"	10
2.2	Quelques détails historiques	10

2.3	Fonction Gamma de Euler et fonctions de Mittag-Leffler	11
2.4	Intégrales fractionnaires	16
2.5	Dérivée de Riemann-Liouville	18
2.6	Dérivée de Caputo	20
2.7	Dérivée de Grünwald-Letnikov	22
3	FODE models	25
3.1	Some tools	25
3.2	Drawbacks	27
3.3	An example: a visco-elastic linear model	27
3.4	An example: a visco-elastic nonlinear model	32
Some references		37

1 Introduction

1.1 Modélisation (mathématique)

Nous partons d'un modèle physique, chimique, biologique, (financier), ... et essayons de le représenter sous forme d'expressions (équations) mathématiques.

Exemples

■ Désintégration d'un élément radioactif.

- Modèle physique : (assez résumé) Un atome quelconque d'un élément radioactif a autant de chances de se désintégrer à un moment donné qu'un autre de la même espèce, le nombre de désintégrations à un instant donné est proportionnel au nombre N d'atomes de même espèce présents.
- Modèle mathématique : soit $N(t)$ le nombre (ou, plutôt, la fraction relative) d'atomes radioactifs de notre échantillon, nous avons $N'(t) = -\lambda N(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Nous savons résoudre : $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.

■ Deuxième loi de Newton

- Modèle physique (énoncé archaïque) : "Les changements qui arrivent dans le mouvement

sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.”

- Modèle mathématique : $\vec{x}'(t) = \vec{v}$, $m\vec{v}' = \vec{F}$. En résumé, $m\vec{a} = \vec{F}$.

Parfois la présentation est trompeuse :

- (Faux) modèle d’écologie de Leonardo Pisano (*Fibonacci*)

- Modèle écologique : “Quelqu’un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu’ils enfantent dans le second mois après leur naissance.” (et tous restent en vie, sinon...)
- (Vrai) modèle mathématique: obtenir la valeur de N_{12} , sachant que $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$ et que $N_0 = N_1 = 1$.

Le but : construire un modèle (que ce soit physique, etc, puis mathématique) qui représente l’essentiel du système étudié.

Constructions : de bas en haut (bottom-up), à partir de principes premiers (axiomes) ; de haut en bas (top-bottom) à partir d’un modèle connu que l’on essaye d’ajuster.

Limitations et risques : le problème de la *vache sphérique* ou de *l’ensemble vide*, le problème du modèle *trop beau*.

1.2 Un cas bien réussi : les systèmes dynamiques

Ce sont des modèles mathématiques que l'on retrouve dans de nombreuses formulations pour représenter l'évolution d'un système avec le temps. Ce temps peut correspondre à une variable réelle (temps continu) ou naturelle (temps discret). De nombreux systèmes sont modélisés de manière satisfaisante, par exemple en physique, la mécanique (classique ou quantique), la gravitation, la thérmodynamique, ...

1.2.1 Formulation (temps continu, nombre fini de variables)

Nous avons vu :
$$\begin{cases} \vec{x}' = v, \\ \vec{v}' = (1/m)\vec{F}, \end{cases} \quad \text{en général } t \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{f} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = f_1(\vec{x}, t), \\ x'_2 = f_2(\vec{x}, t), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(\vec{x}, t). \end{cases}$$

- Les composantes de \vec{x} correspondent aux différentes variables nécessaires à caractériser l'état du système de façon unique. Par exemple pour un mobile classique, les trois composantes de la position, les trois composantes de la vitesse.
- On distingue entre les systèmes *non-autonomes* et *autonomes* selon si \vec{f} dépend ou non explicitement du temps.

- Tout système non-autonome peut se transformer en un autonome, en rajoutant une variable, x_{n+1} qui aurait pour dérivée 1 pour tout temps. Mais (ça ne conduit à rien, ou presque, et) en pratique l'analyse de ces systèmes se fait avec des outils différents.
- En principe on voudra résoudre les équations à partir d'une donnée initiale: $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (problème de Cauchy) dans l'espace de configuration $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et obtenir la *trajectoire* dans l'espace des phases \mathbb{R}^n . En général on n'y arrive pas, mais ...
- Au moins on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution à partir de la donnée initiale, dans un certain intervalle de temps, si le problème de Cauchy est *bien posé* : $f_i(\vec{x}, t)$ sont continues en t et “lipschitziennes” en \vec{x} . (Dans tout intervalle borné la distance entre deux valeurs de la fonction est majorée par la distance entre les valeurs de la variable fois une constante : l'existence de la dérivée n'est pas assurée mais tous les taux d'accroissements sont bornés par la constante $\forall s_1, s_2, |h(s_1) - h(s_2)| \leq k|s_1 - s_2|$.)
- Pour les systèmes autonomes l'analyse se fait principalement autour des solutions constantes (*points critiques*) qui n'existent pas pour les systèmes non-autonomes.

1.2.2 Étude des points critiques pour un système autonome

- Pour chaque point critique on cherche à établir sa stabilité : quel est le comportement au voisinage de ce point ?
 - Développements limités de chaque f_i centrés sur le point critique \vec{x}_0 . Sous forme générale :
$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}_0) + M(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(1) = M(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(1),$$
 M une matrice $n \times n$ constante.
 - On résout le système linéaire associé : $\vec{y}' = M\vec{y}$. $[\vec{y}(t) = e^{Mt}\vec{y}_0 \text{ !!}]$
 - Importance des *vecteurs propres*.
 - Importance des *valeurs propres*.

Parenthèse (

Définition : étant donné une matrice carrée M on appelle vecteur propre \vec{v} associé à la valeur (scalaire) propre λ à tout vecteur non-nul (pourquoi non-nul ?) tel que $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

- Il n'existe pas de vecteur propre sans valeur propre, et vice-versa.
- Les directions correspondantes aux vecteurs propres sont vraiment spéciales.
- Tout vecteur propre nous donne une solution particulière de l'équation différentielle

$$\vec{y}'(t) = a(t)\vec{v} \implies \vec{y}'(t) = a'(t)\vec{v}, \quad M\vec{y} = \lambda a(t)\vec{v}$$

et l'équation $\vec{y}' = M\vec{y}$ n'est plus vectorielle mais scalaire : $a'(t) = \lambda a(t)$.

- Mais ... λ peut être “compliqué” : les valeurs propres sont les racines d'un certain polynôme associé à la matrice. En général $\lambda \in \mathbb{C}$ (!!!)

Pour ne pas ouvrir une deuxième parenthèse disons que la forme générale de $a(t)$ est

$$e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)], \quad c_1, c_2 \text{ constantes.}$$

On appelle α la partie réelle de λ et β sa partie imaginaire :

- si $\alpha > 0$, $a(t)$ n'est pas borné quand t tends vers $+\infty$,
- si $\alpha < 0$, $a(t)$ tends vers zéro quand t tends vers $+\infty$,
- si $\alpha = 0$, (et $\beta \neq 0$) $a(t)$ est une fonction périodique de t .

Parenthèse)

En conclusion, pour un point critique donné

- Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, au voisinage du point critique les solutions vont tendre vers celui-ci avec le temps. [point asymptotiquement stable]
- Si il y a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, au voisinage du point critique des solutions vont s'éloigner. [point instable]
- Dans toute autre situation on ne peut pas conclure sur la stabilité du point à partir de l'approximation linéaire et une étude plus approfondie est nécessaire.

Tout cela n'ait des travaux de Poincaré^a et continue de nos jours avec multitude de questions ouvertes, ne serait-ce qu'en relation avec la théorie du chaos (l'effet papillon).

^aMémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume 7, pages 375–422, (1881) ; Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume 8, pages 251–296(1882) ; Sur les courbes définies par les équations différentielles (III), H. Poincaré, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Volume 1, pages 167–244 (1885).

2 Outils mathématiques

2.1 Motivation d'une "formulation fractionnaire"

Les systèmes complexes (verre, cristaux liquides, polymères, protéines, les êtres vivants, les écosystèmes - humains inclus - etc.) se caractérisent par posséder un gran nombre d'éléments qui interagissent entre eux. On y trouve, aussi, de multiples échelles et des phénomènes de mémoire. Les matériaux viscoélastiques en sont un exemple.

Comme alternative aux modèles avec des dérivées "classiques", on considère depuis déjà un bon nombre d'années des modèles, dits "fractionnaires", ayant des dérivées d'ordre non-entier.

2.2 Quelques détails historiques

Le 28 février 1695 ^a, Leibniz écrit une lettre à (Johann) Bernoulli en réponse à un développement en série (de "Taylor")^b proposé par Bernoulli pour la primitive d'une fonction. Leibniz, qui était apparemment malade, fait une erreur qui comprends des dérivées d'ordre négatif dans ces développements.

^aS. Dugowson, *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Ph.D. Dissertation, Université Paris Nord, 1994.

^bÀ ce moment Taylor est agé de moins de dix ans...

Une correspondance s'ensuit où tous deux discutent de différents détails. De L'Hôpital se joint à eux et c'est dans une lettre qu'il reçoit de Leibniz, du 30 septembre 1695, où celui-ci introduit des dérivées d'ordre non-entier^c toujours dans le cadre des développements en série. Leibniz finit par remarquer sur la possible interprétation : "comme toute paradoxe, celle-ci peut fournir des résultats intéressants dans un futur."

Si bien différents auteurs, tels que Euler en 1730, Lagrange en 1754 ou Fourier en 1822, se sont penchés sur le sujet, il faut attendre qu'Abel, en 1823, l'utilise pour résoudre le problème de l'intégrale tautochrone, pour que quelqu'un propose une formulation générale, ce que fait Liouille en 1832.

À partir de ce moment une formulation par des intégrales d'ordre non-entier est bâtie avec des contributions (entre autres) de Riemann, Laurent, Hadamard, Heaviside, Sonin, Grünwald, Letnikov, etc., uses preferably the so called fractional integrals, because of their properties. À partir de ces intégrales des dérivées d'ordres non-entiers sont définies.

De nos jours ce sont, dans beaucoup de cas, des applications d'ingénierie qui ont fait croître l'intérêt, suivi de l'analyse mathématique de leurs propriétés. On trouve maintenant plusieurs définitions que l'on applique, par exemple, en hydrodynamique pour décrire des fluides viscoélastiques, ou dans des processus de diffusion anormale, ou de contrôle de modèles avec mémoire, etc.

^cplus exactement, des différentielles d'ordre non-entier

2.3 Fonction Gamma de Euler et fonctions de Mittag-Leffler

La fonction gamma (majuscule) de Euler, Γ (notation, par contre, due à Legendre), peut être considérée comme une généralisation de la factorielle. Elle est définie pour $z \in \mathbb{R}^+ \text{ } ^\text{d}$ par :

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds,$$

et satisfait, entre autres les propriétés :

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

d'où l'on déduit

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

^dEn général $z \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(z) > 0$ mais, bon, restons réels.

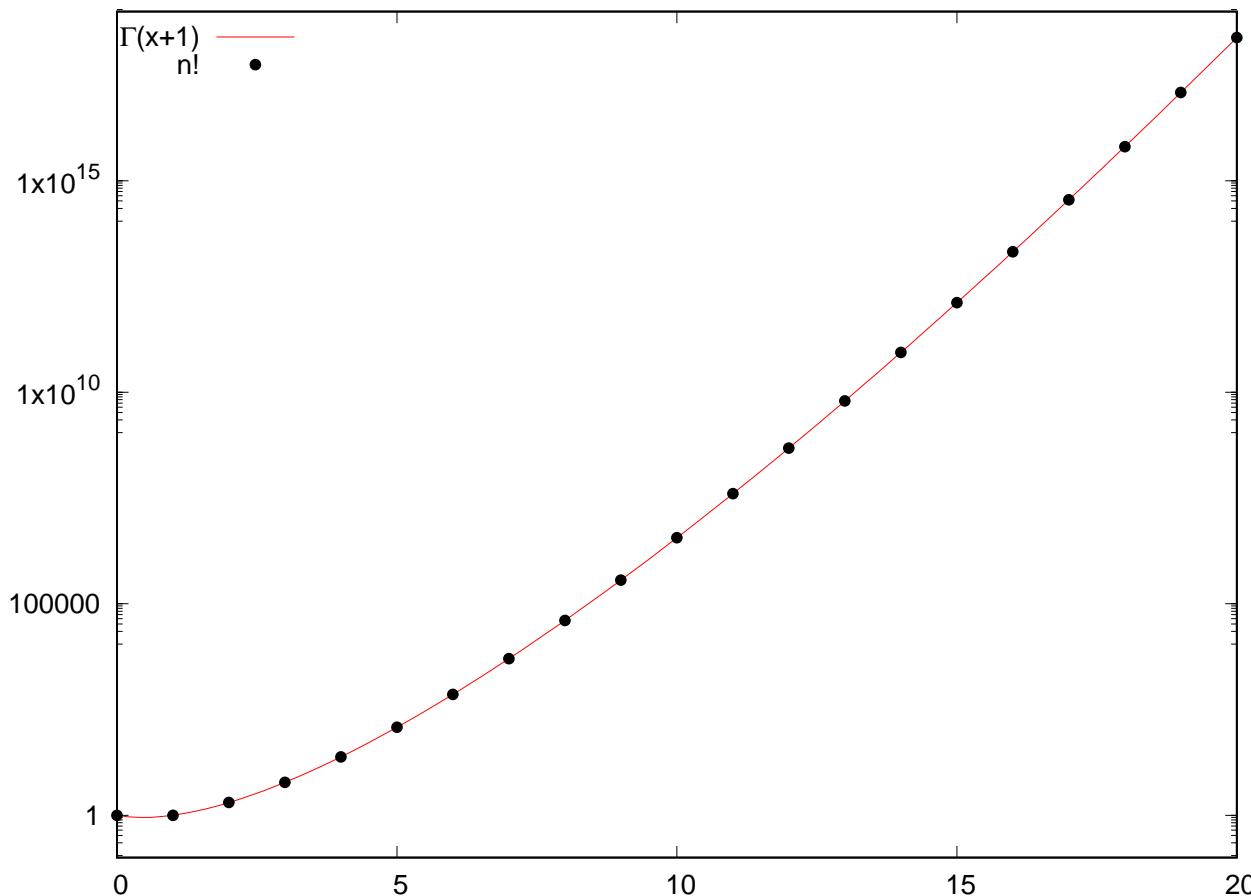


Figure 1: Représentations de la fonction Γ de Euler, pour des valeurs positives, et de la factorielle

De son côté, les fonctions de Mittag-Leffler généralisent la fonction exponentielle. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
 E_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, & (\alpha > 0), & \quad E_1(x) = e^x, \\
 E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, & (\alpha, \beta > 0), & \quad E_{\alpha,1} = E_\alpha, \\
 E_{\alpha,\beta}^l(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{l! \Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{x^k}{k!}, & (\alpha, \beta > 0; l \in \mathbb{N}), & \quad E_{\alpha,\beta}^0 = E_{\alpha,\beta}.
 \end{aligned}$$

Ces exponentielles généralisées, avec des arguments négatifs, $E_\alpha(-kt)$, $k > 0$, ont un comportement semblable à celui de l'exponentielle pour $0 < \alpha < 1$, mais pour $1 < \alpha < 2$ elles présentent des oscillations amorties.

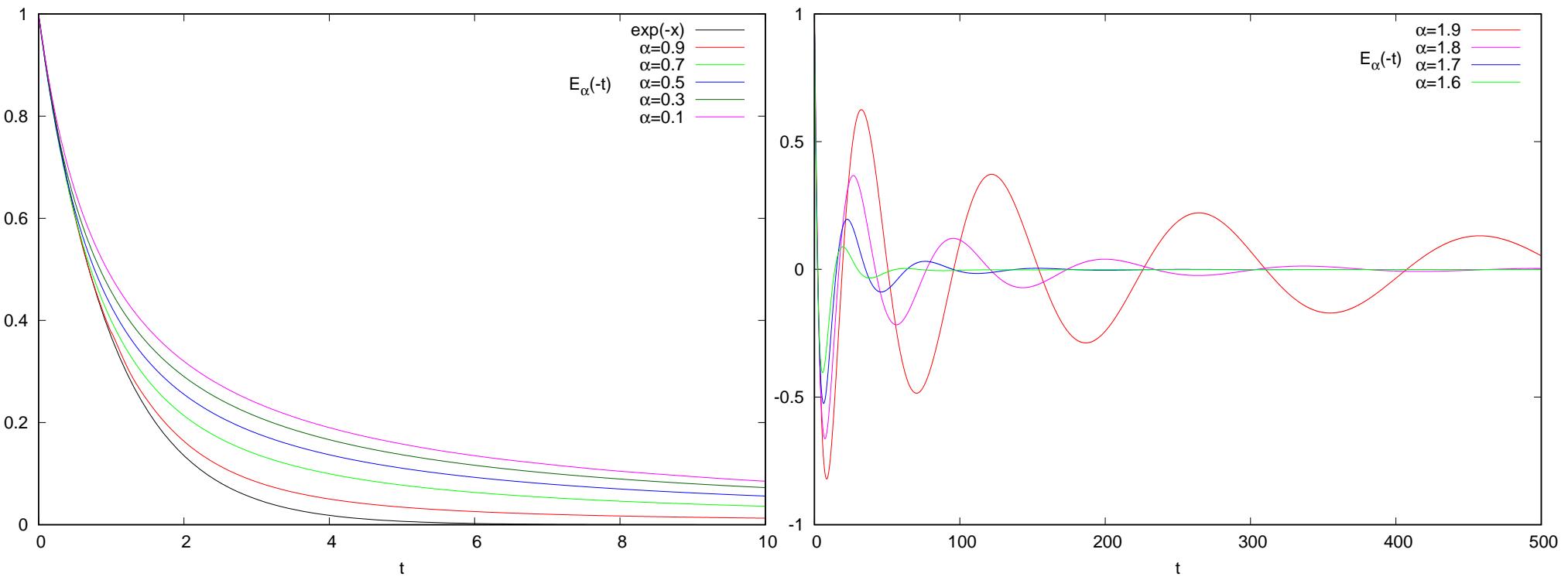


Figure 2: $E_\alpha(-t)$ pour quelques valeurs de α , avec $\alpha \in (0, 1)$ ou $\alpha \in (1, 2)$.

2.4 Intégrales fractionnaires

Il est possible d'imaginer une dérivée d'ordre non-entier à partir des transformées de Fourier ou de Laplace :

- Si $\mathcal{F}(f^{(n)})(x) = (2\pi i\kappa)^n \mathcal{F}(f)(\kappa)$, à quoi correspond $\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi i\kappa)^\alpha \mathcal{F}(f)(\kappa)\right)$, quand $\alpha \notin \mathbb{N}$?
- Si $\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = p^n (\mathcal{L}f)(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, à quoi correspond $\mathcal{L}^{-1}\left(p^\alpha (\mathcal{L}f)(p)\right)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$?

Cependant on part d'une autre approche, en généralisant une idée bien différente.

Formule de l'intégrale itérée de Cauchy

De la même façon que l'on peut penser à des dérivées successives pour une fonction :

$$f(x), \quad Df(x) = f'(x), \quad D^2f(x) = f''(x), \dots, \quad D^n f(x) = f^{(n)}(x),$$

on peut envisager d'itérer l'intégration :

$$\mathcal{I}f(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \mathcal{I}^2 f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(t) dt, \quad \mathcal{I}^3 f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f(t) dt, \dots$$

La formule de Cauchy représente l'itération d' n intégrations successives avec unique intégrale convolution^a :

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Étant donnée la généralisation de la factorielle, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie comme^b :

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in]a, b[.$$

Ce sont des opérateurs non locaux ayant les suivantes propriétés :

- Les intégrales sont bien définies si $f \in L^1[a, b]$.
- Quand $\alpha \in \mathbb{N}$ on retrouve le cas “classique”.
- Loi des indices (demi-groupe) : soient $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha, \beta > 0$, alors, p.p. en $]a, b[$,

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x).$$

^aJe vous invite à le démontrer (par récurrence sur n).

^bA.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam 2006.

- L'intégrale d'une puissance est une puissance : soient $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$I_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \text{ p.p.}$$

2.5 Dérivée de Riemann-Liouville

On la définit comme :

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := (D^n I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

avec n tel que $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ (notation: $n = \lceil \alpha \rceil$) et où D représente la dérivée usuelle. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve l'expression usuelle qui correspond. Mais en général la dérivée correspond à un opérateur non local.

Quelques propriétés

- La dérivée est bien définie pour des fonctions $f \in AC^n[a, b] : C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$.
continue \supset lipschitzienne \supset Absolument Continue \supset dérivable.
- Limites aux ordres naturels :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f^{(n)}(x).$$

- Dérivée d'une puissance : soient $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

- Dérivée d'une constante : soit $0 < \alpha < 1$, alors

$$D_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Par ailleurs :

$$D_{a+}^{\alpha} y(x) = 0 \iff y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

avec c_j, d_j des constantes arbitraires.

- Loies des indices : soient $f \in L^1[a, b]$, $\alpha, \beta > 0$, alors p.p.

$$\star (D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^m (D_{a+}^{\beta-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \quad \lceil \beta \rceil = m.$$

$$\star (D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

$$\star (I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}, \quad n = \lceil \alpha \rceil.$$

$$\star (D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x), \text{ si } \alpha \geq \beta, \quad (D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (D_{a+}^{\beta-\alpha} f)(x), \text{ si } \alpha \leq \beta.$$

- Problème de Cauchy avec une dérivée de Riemann-Liouville : la solution de

$$D_{a+}^{\alpha} x(t) = f[t, x(t)], \quad \alpha > 0, \quad t > a,$$

avec

$$D_{a+}^{\alpha-k} x(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = \lceil \alpha \rceil,$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} x(a^+) := \lim_{t \rightarrow a^+} D_{a+}^{\alpha-k} x(t) \right)$$

existe et est unique avec les mêmes hypothèses que pour le cas d'ordre entier. Mais...

- les conditions sont *bizarres*,
- quel serait le space des phases ?

2.6 Dérivée de Caputo

Pour avoir un problème de Cauchy avec des conditions ayant des dérivées d'ordres entiers on peut avoir recours à la dérivée de Caputo définie par :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) := (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x), = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt,$$

Cela correspond à intervertir la dérivation et l'intégration dans la formule de R-L. La fonction f est maintenant plus régulière puisque sa dérivée n -ième doit exister.

Quelques propriétés

- Relation entre les dérivées de R-L et C :

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = ({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha}.$$

- Dérivée d'une constante :

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} 1) = 0.$$

- Soient $\alpha > 0$, $\lceil \alpha \rceil = n$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors

$${}^c D_{a+}^{\alpha} (x-a)^k = 0.$$

- Problème de Cauchy avec une dérivée de Caputo : la solution de

$$D_{a+}^{\alpha} x(t) = f[t, x(t)], \quad \alpha > 0, \quad t > a,$$

avec

$$D_{a+}^k x(a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = \lceil \alpha \rceil,$$

existe et est unique avec les mêmes hypothèses que pour le cas d'ordre entier.

- Fonctions (vecteurs) propres : soient $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$D_{a+}^{\alpha} E_{\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}) = \lambda E_{\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}).$$

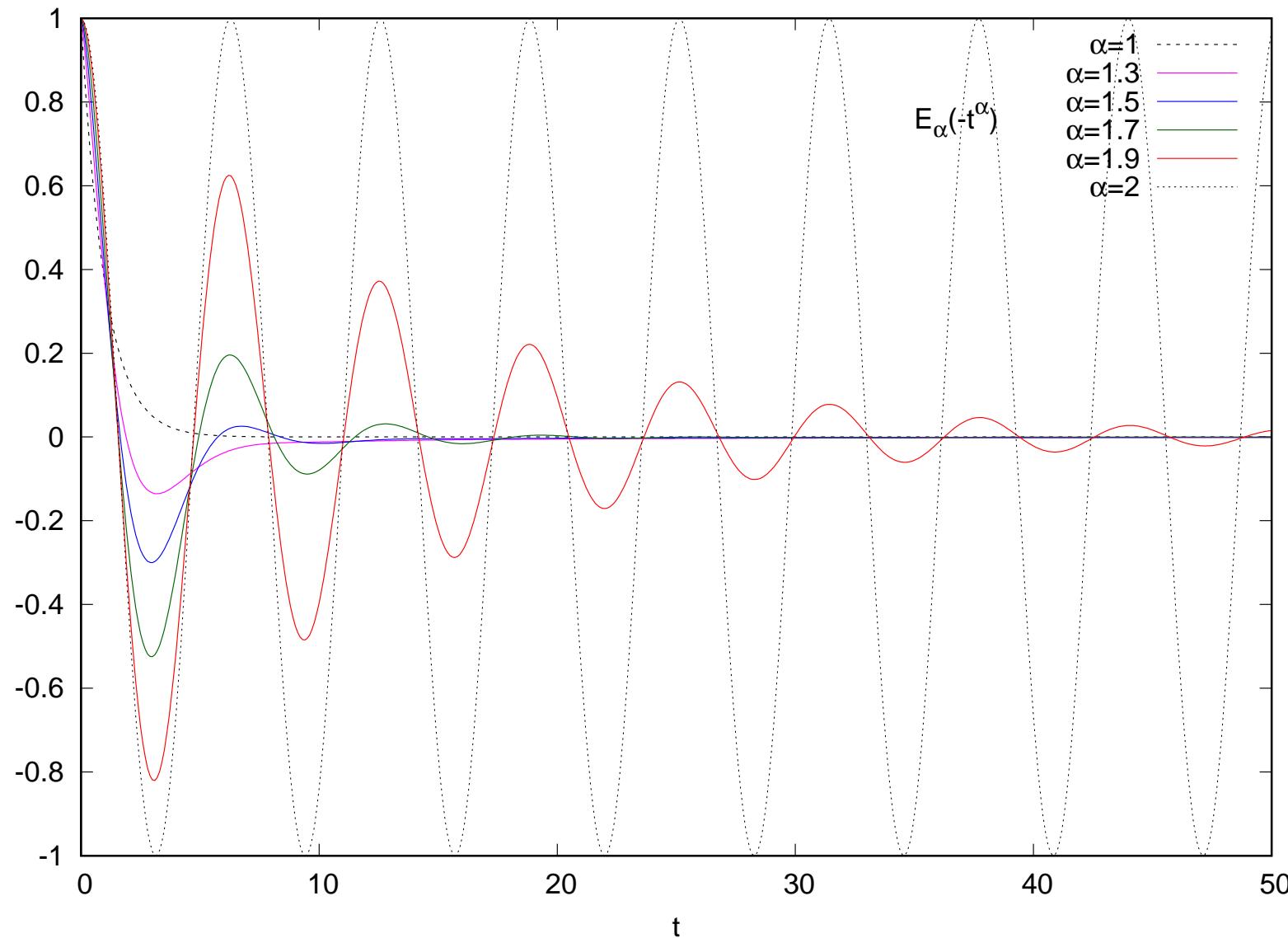


Figure 3: Fonctions propres de la dérivée de Caputo, $\lambda = -1$, $E_\alpha(-t^\alpha)$.

2.7 Dérivée de Grünwald-Letnikov

C'est une approche bien différente :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x) - f(x - h)),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x - h)}{h} - \frac{f(x - h) - f(x - 2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)), \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} (f(x) - 3f(x - h) + 3f(x - 2h) - f(x - 3h)),$$

$$f^{(4)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} (f(x) - 4f(x - h) + 6f(x - 2h) - 4f(x - 3h) + f(x - 4h)),$$

etc.

Quels sont ces coefficients ?

La formule générale est bien :

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} f(x - \ell h), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Extension fractionnaire : étant donné que

$$\binom{n}{\ell} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}$$

on choisit :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\ell! \Gamma(\alpha+1-\ell)} f(x - \ell h), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Le problème : n , la valeur supérieure de la somme, n'as plus aucun sens. Si on considère $x \in [a, b]$ (et b pourrait même être $+\infty$), on peut écrire

$$h = \frac{x-a}{n} \implies n = \frac{x-a}{h}, \quad h > 0,$$

et on substitue n par la partie entière de cette valeur. On définit, finalement :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^\ell \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\ell! \Gamma(\alpha+1-\ell)} f(x - \ell h), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Dans la pratique, la limite en h est tronquée et une petite valeur de h (suffisamment petite) est choisie pour obtenir une approximation.

3 FODE models

There have been bottom-up generated models, arising from actual applications. For instance in control or in the study of visco-elastic media [3]. There have also been top-down generated models, trying to see what consequences can be obtained “fractionalizing” a given integer-order ODE, with different success.

3.1 Some tools

The fractional derivatives are linear operators. This allows to preserve some interesting features of the integer-order case (especially true in the case of the Caputo Derivative).

- “Fractional Picard Theorem”: existence and unicity of the solution for the ivp

$$\text{ODE: } \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \text{FODE: } {}_{\text{RL}}^{\text{C}} D^{\alpha} x = f(t, x), \quad \text{if } f \text{ is continuous in } t \text{ and Lipschitz in } x. \quad (1)$$

- For linear equations the superposition principle holds: linear combinations of solutions are solutions.
- Laplace and Fourier Transform can be applied.

- Linear, homogeneous, equations with constant coefficients have as space of solutions a vector space spanned by the eigenfunctions of the differential operator:

$$\begin{array}{lll} \text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = M\vec{x}, & \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = M\vec{x}, & \vec{x}(t) = \sum_k c_k f_k(t) \vec{v}_k. \end{array} \quad (2)$$

- Similarly if we add a constant: the solution is the general solution of the homogeneous equations plus a particular solution of the inhomogenous system:

$$\begin{array}{lll} \text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = M\vec{x} + \vec{c}, & \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = M\vec{x} + \vec{c}, & \vec{x}(t) = \vec{f}_p(t) + \sum_k c_k f_k(t) \vec{v}_k. \end{array} \quad (3)$$

- Linear stability analysis of hyperbolic critical points is valid (first Lyapunov method [4]):
 $\arg \in [-\pi, \pi)$

$$\text{ODE: } \forall k, \text{Re}(\lambda_k) < 0 \iff \forall k, |\arg(\lambda_k)| > \pi/2 \quad (4)$$

$$\text{FODE: } \forall k, |\arg(\lambda_k)| > \alpha\pi/2, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (5)$$

- Nonlinear stability analysis by the second Lyapunov method exists (Lyapunov function[5]):
 $\text{ODE: Strong stability, } \text{FODE: "Mittag-Leffler" stability (implies strong stability).}$
- Critical points correspond to constant solutions (Caputo):

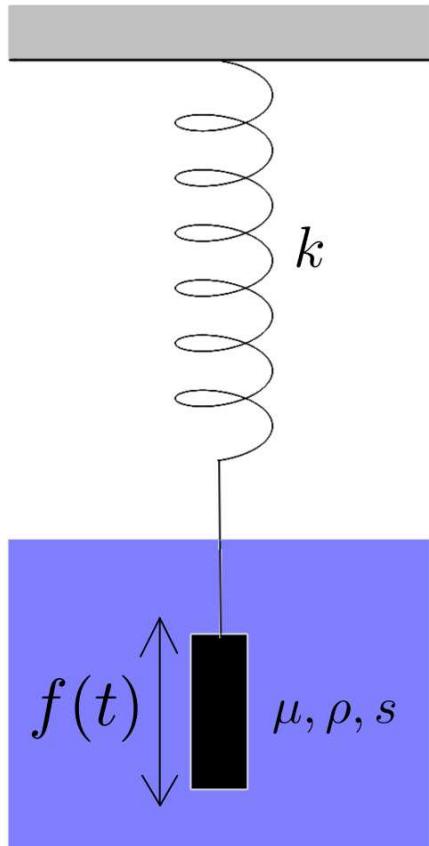
$$\begin{array}{lll} \text{ODE: } \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), & \text{FODE: } {}^C D^\alpha \vec{x} = \vec{f}(\vec{x}), & \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}. \end{array} \quad (6)$$

3.2 Drawbacks

Some properties, many of which are everyday tools, do not transfer to the fractional models.

- The Leibniz rule is not valid.
- The chain rule is not valid.
- The eigenfunctions of fractional derivatives are not orthogonal (thus, no Fourier Series).
- Higher order equations do not correspond necessarily to a system of unique order.
- What is now the phase space?

3.3 An example: a visco-elastic linear model



We consider a thin plate of surface s moving vertically in a fluid of density ρ , with viscosity μ , attached to a spring with constant k , subject to an external force $f(t)$. The behaviour of the displacement $x(t)$ is modeled by the fractionally damped equation:

$$\ddot{x} + a {}^C D^\alpha x + kx = f(t) \quad (7)$$

with a some constant that depends on μ , ρ and s .

This linear system can be (formally) solved by the Laplace transform, depending on the initial conditions $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

Let be $\mathcal{L}(x(t)) = Y(p)$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) + (p + ap^{\alpha-1})x(0) + (1 + ap^{\alpha-2})\dot{x}(0)}{p^2 + ap^\alpha + k}.$$

In the cases where $2/\alpha$ is rational, with zero initial conditions, it can be formulated, by *congruent decomposition* as a spectral problem for some basic operator ${}^C D^{p/q}$.

Application: $\alpha = 3/2$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Since we have zero initial conditions we have:

$${}^cD^{1/2}({}^cD^{1/2}x) = {}^cD^{2/2}x, \quad \text{etc.}$$

We define auxiliary variables x_k such that $x_0 = x$ and express the equation as

$$\begin{cases} {}^cD^{1/2}x_0(t) = x_1(t), \\ {}^cD^{1/2}x_1(t) = x_2(t), \\ {}^cD^{1/2}x_2(t) = x_3(t), \\ {}^cD^{1/2}x_3(t) = -kx_0(t) - ax_3(t) + f(t), \\ x_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \iff {}^cD^{1/2}\vec{x} = M\vec{x} + \vec{v}(t).$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

We then diagonalize M , uncouple the equations representing \vec{x} in a basis of eigenvectors (complex), solve and, finally, transform back to obtain $x(t) = x_0(t)$.

Or we can solve numerically: (the periodic limit cycle is **not** a solution)

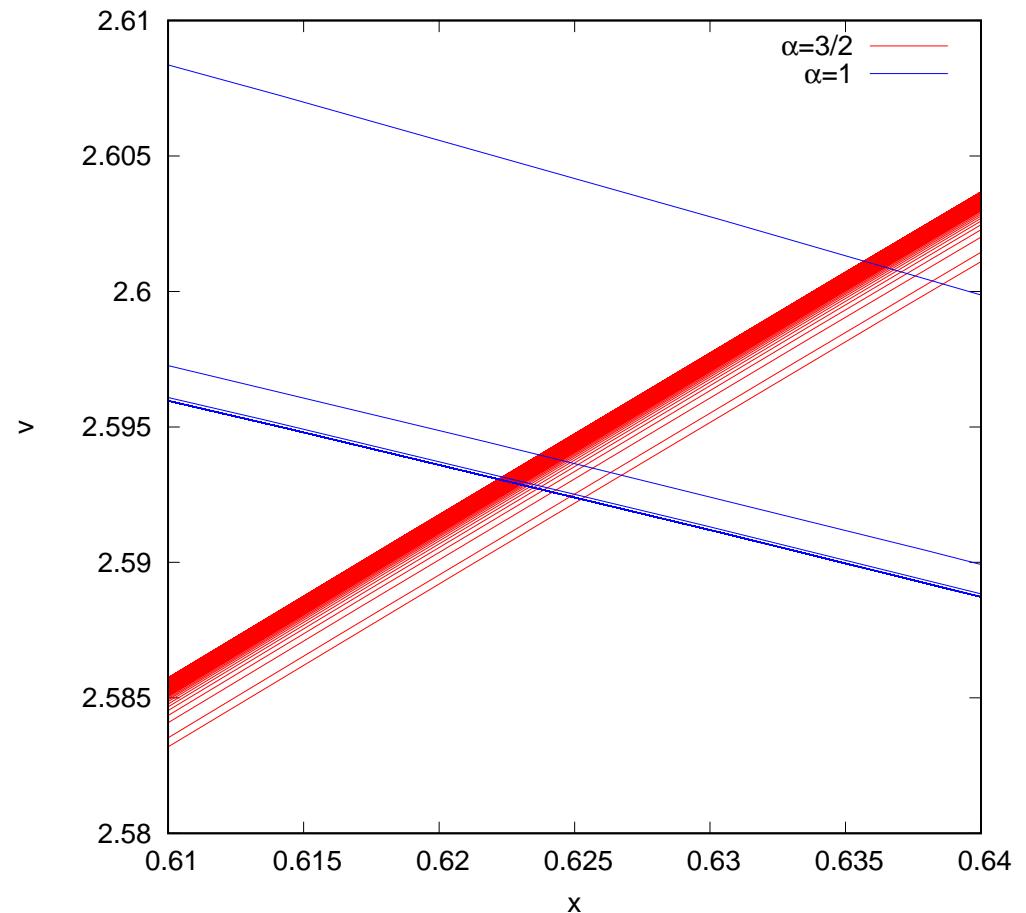
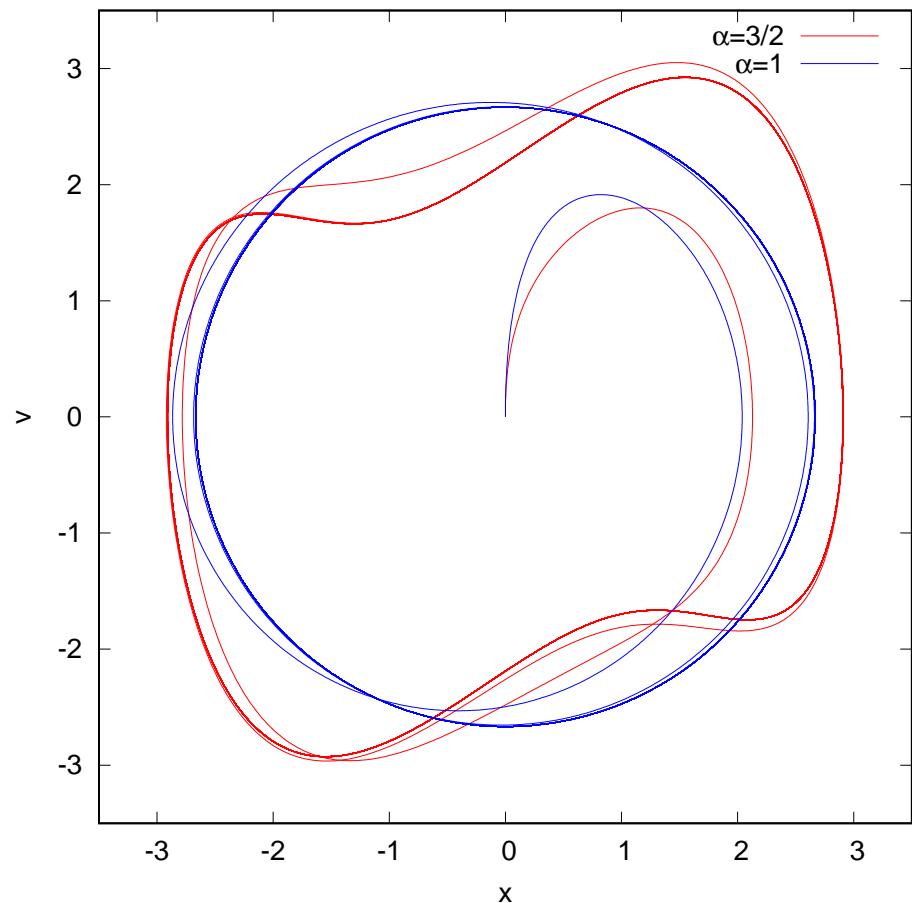


Figure 4: $a = 3$, $k = 1$, $f(t) = 8 \cos(t)$

Second example: Bagley-Torvik Equation

It corresponds to the i.v.p. with Caputo fractional derivative of order 3/2 given by:

$$\begin{cases} D^2 x(t) + 2D^{3/2}x(t) - 3x(t) = \sin(t), \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

we can solve it, as the previous example, by congruent decomposition. The linear system is, in this case:

$$D^{1/2} \vec{x}(t) = M \vec{x} + \vec{c},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of M are:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt[3]{2}, \quad \lambda_{3,4} = -1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

In the “classical” case ($\alpha = 1$) the solution is unbounded:

$$x(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{40}e^{-3t} - \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t).$$

But for $\alpha = 3/2$ we obtain a periodic curve as the limit.

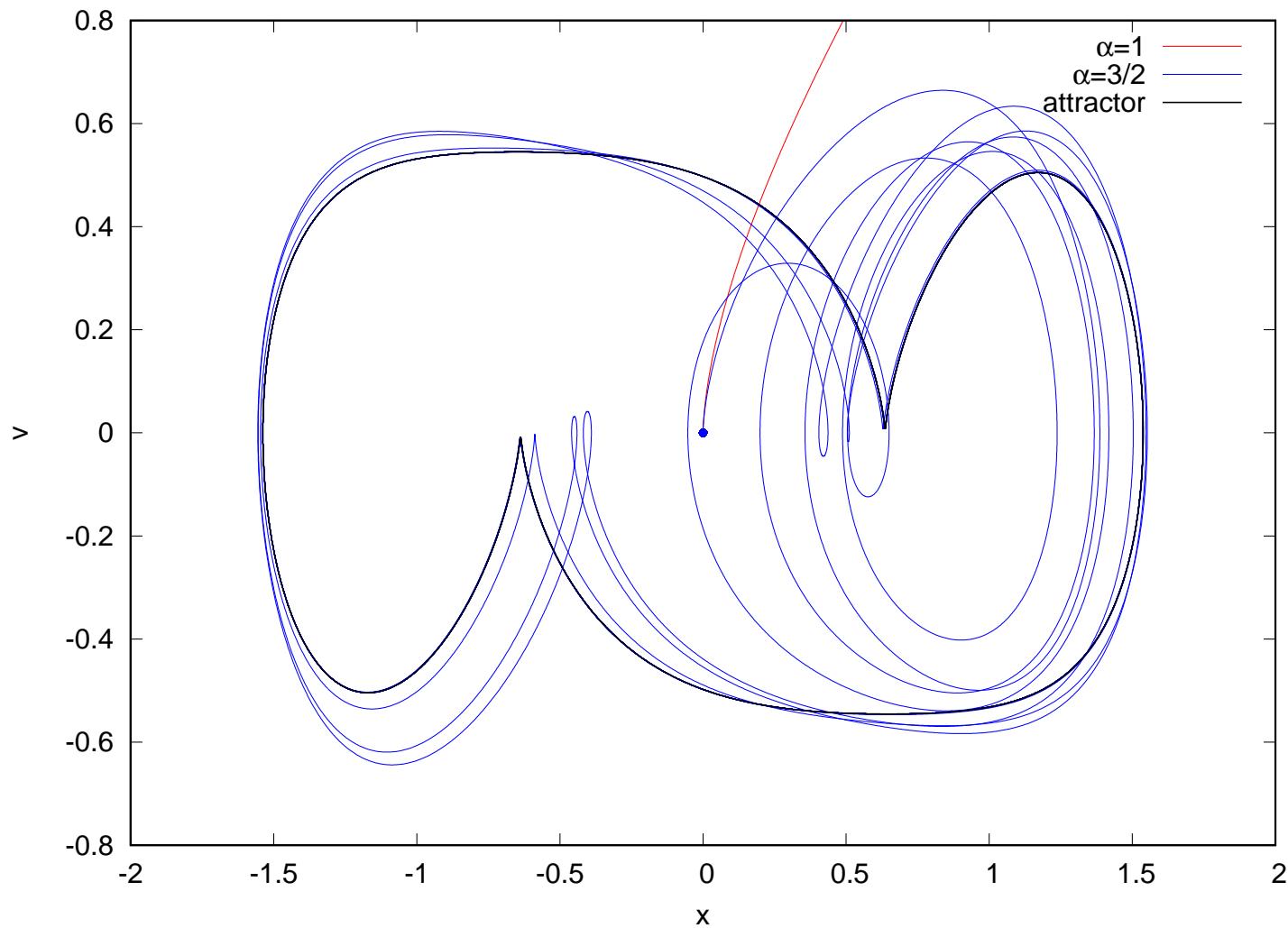


Figure 5: solution of the Bagley-Torvik Problem for $\alpha = 1$ and for $\alpha = 3/2$.

3.4 An example: a visco-elastic nonlinear model

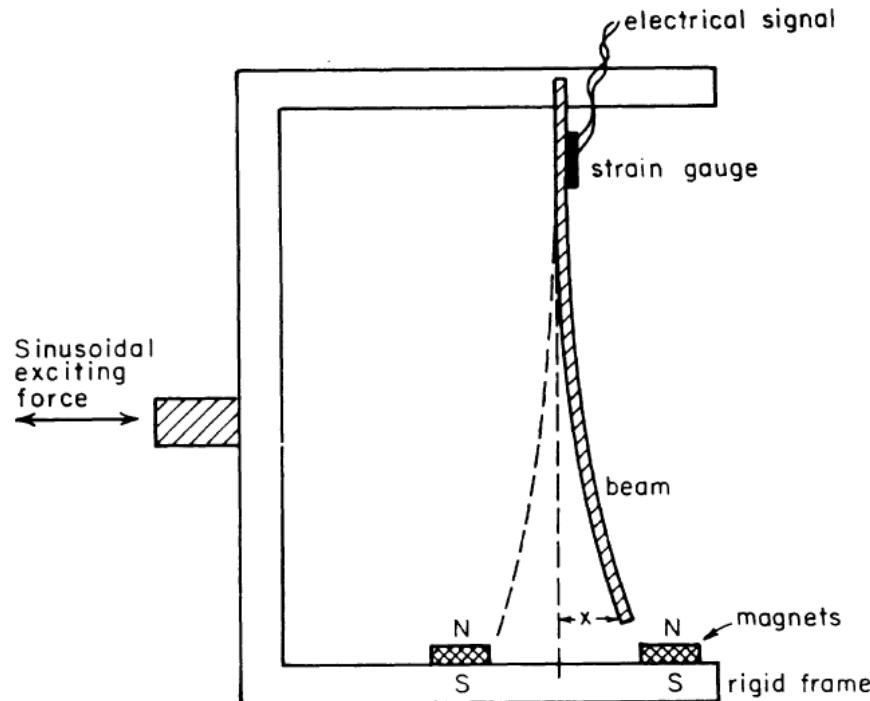


Figure 2.2.1. The magneto-elastic beam.

Figure 6: Guckenheimer & Holmes [6], experimental setup of the Duffing equation.

The equation

$$\ddot{x} + \gamma^c D^\alpha x - x + x^3 = f_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

is a “visco-elastic-damped” counterpart of the Duffing equation:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = f_0 \cos(\omega t). \quad (9)$$

It corresponds to the same device but immersed in a visco-elastic fluid. With a Cauchy problem $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, it has a unique solution starting at time $t_0 = 0$.

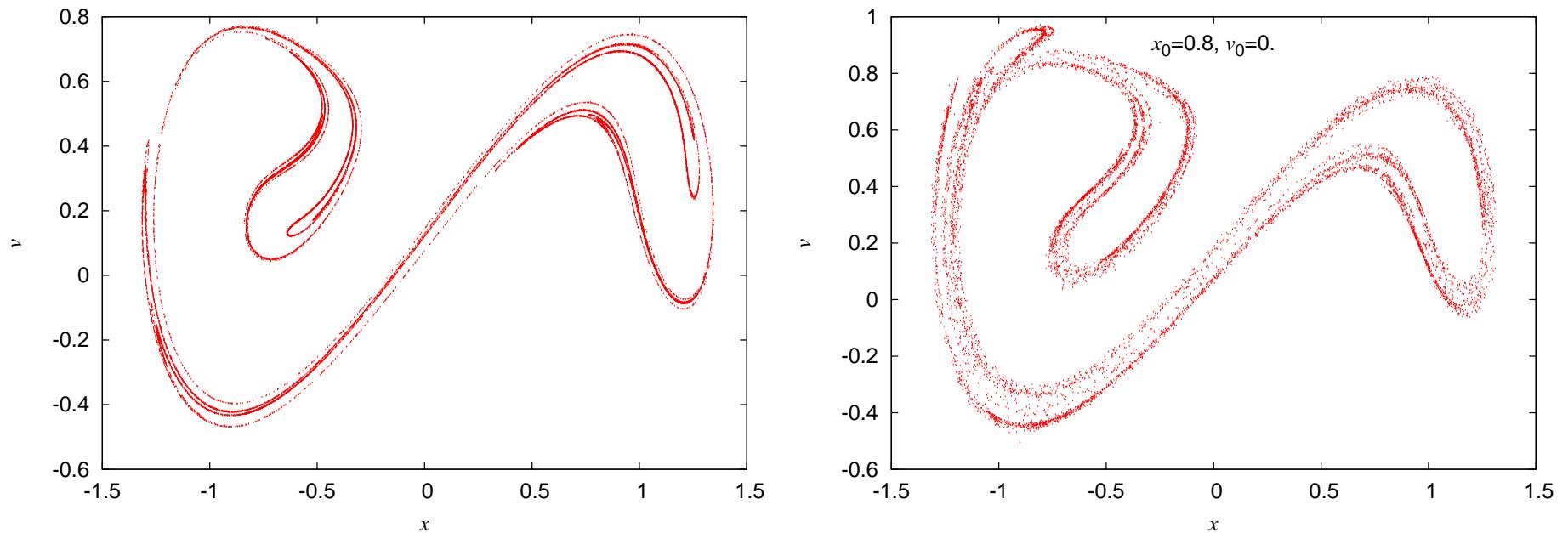


Figure 7: The strange attractor of the integer-order (left) and of the fractional-order Duffing equation (right).

Property

Let us consider, for instance, the following initial value problem:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \gamma \left({}^c D_{t_1}^\alpha x \right)_t (t) - F(x) = f_0 \cos(\omega t), \\ x(t_1) = a, \quad \dot{x}(t_1) = b. \end{cases} \quad (10)$$

We use:

$$\begin{aligned}
\left({}^cD_{t_1^+}^\alpha x\right)_t(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^s \frac{\frac{\partial^n}{\partial \sigma^n} x(t_1 + \sigma)}{(s-\sigma)^{\alpha+1-n}} d\sigma \quad [t = t_1 + s, \quad \tau = \sigma + t_1] \\
&= ({}^cD_{0^+}^\alpha x)_s(t_1 + s) = ({}^cD_{0^+}^\alpha y)_s(s), \quad [y(s) = x(t_1 + s)] \tag{11}
\end{aligned}$$

and we rewrite (10) as

$$\begin{cases} y'' + \gamma ({}^cD_{0^+}^\alpha y)_s(s) - F(y) = f_0 \cos(\omega s + \phi_0), \quad \phi_0 = \omega t_1, \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b. \end{cases} \tag{12}$$

where the prime stands for derivation with respect to s . We obtain the same system as (10) but at $t = 0$ and with an initial time-phase. If, for instance, $t_1 = 2\pi/\omega$, $a = x_0$ and $b = v_0$, (12) becomes (8).

Conclusions

- All solutions can be reached from $t_0 = 0$ We may consider that any solution that starts at a later time is, in fact, a solution that started at $t_0 = 0$ but with a phase.
- We still don't know... We still don't know how to prolong a given solution from the "state" it is at a given time.
- But... Our Cauchy problem, for any solution, can be stated at time $t_0 = 0$ with three values: x_0 , v_0 and ϕ_0 .
- 3-dim space We conclude that our phase space has three dimensions: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$.
- 2-dim in practice for many purposes Just as for a noautonomous "classical" system. Since the initial phase is a constant, it is not relevant for many aspects when analysing the solutions.
- So... What is the phase space, in practice, for a fractional system? The space of initial conditions or the space of conditions to prolong a solutions?

See for instance [7, 8].

Some references

- [1] S. Dugowson, *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Ph.D. Dissertation, Université Paris Nord, 1994.
- [2] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam 2006.
- [3] R.L. Bagley, P.J. Torvik, “On the fractional calculus model of viscoelastic behavior”, *Journal of Rheology*, **30**(1), (1986), 133–155. And references therein.
- [4] D. Matignon, “Stability results for fractional differential equations with applications to control processing”, *Computational Engineering in Systems Applications*, **2** (1996) 963-968.
- [5] Delavari, H., Baleanu, D. & Sadati, J., “Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited”, *Nonlinear Dyn* **67**, 2433-2439 (2012).
- [6] J. Guckenheimer and Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [7] Hamaizia, S., Jiménez, S. & Velasco, M.P., “Rich phenomenology of the solutions in a fractional Duffing equation”, *Fract Calc Appl Anal* **27**, 1017-1047 (2024).
- [8] Hamaizia, Sara (2024). *Chaos and Dynamics in a Fractional Duffing Equation*, PhD. Thesis Dissertation, E.T.S.I. Telecomunicación (Universidad Politécnica de Madrid).
<https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.84420>.

Merci de votre attention !